От автора

Переработанное и дополненное 2-е издание пособия представляет собой подробные поурочные планы по геометрии для VII класса и ориентированно прежде всего на работу с учебным комплектом: **Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф. и др. Геометрия: 7–9 классы. – М.: Просвещение; Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф. и др. Геометрия: 7 класс. Рабочая тетрадь. – М.: Просвещение.**

Перед автором была поставлена задача – максимально обеспечить подготовку учителя к уроку и организацию работы на уроке.

В данной книге учитель сможет найти подробные поурочные разработки, методические советы и рекомендации, тексты самостоятельных и контрольных работ, тестовые задания, дополнительные задачи по каждой теме, задачи повышенной сложности. Пособие будет полезно в первую очередь начинающему учителю, который сможет позаимствовать полностью предлагаемые сценарии уроков, а также опытному педагогу для использования их частично, встраивая в собственный план урока.

Для удобства работы предлагается почасовое тематическое планирование учебного материала в соответствии с данным пособием, а также в начале каждой главы курса дается выписка из тематического планирования учебного материала программы для общеобразовательных школ.

Поурочные разработки в своей основе ориентированны на организацию работы класса по технологии дифференцированного обучения. Каждый урок начинается с организационного момента, сообщения темы и целей урока. Практически в каждом сценарии урока присутствуют задачи на готовых чертежах. Наличие уже готовых рисунков поможет учителю наиболее рационально использовать рабочее время на уроке. Эти задачи решаются, как правило, устно, но по мере необходимости можно порекомендовать учащимся записать краткое решение задачи. Тестовые задания позволяют своевременно выявить затруднения учащихся и предупредить устойчивые пробелы в их знаниях.

В пособии достаточно дополнительных задач для организации работы с одаренными учащимися, которые также можно использовать в качестве задач для решения на факультативных занятиях по предмету.

Контрольные и самостоятельные работы даны в трех уровнях сложности, что позволяет осуществить дифференцированный контроль. Первый уровень соответствует обязательным программным требованиям, второй – среднему уровню сложности, задания третьего уровня предназначены для учащихся, проявляющих повышенный интерес к математике, а также для использования в классах и школах повышенного уровня. Для каждого уровня приведено два расположенных рядом равноценных варианта. Практически все самостоятельные и контрольные работы сопровождаются решениями, указаниями для учащихся или ответами для эффективной организации работы над ошибками.

Все поурочные разработки, содержащиеся в данном пособии, являются примерными. В зависимости от степени подготовленности и уровня развития как целого класса, так и конкретных учащихся, учитель может и должен вносить коррективы как в методику проведения урока, так и в саму структуру урока, включая подбор заданий для организации классной, самостоятельной и домашней работы.

Примечание: знаком * в самостоятельных и контрольных работах обозначены задания повышенного уровня сложности.

Тематическое планирование учебного материала

Параграф учебника	Урок, №	Тема урока
Глава I. Начальные геометрические сведения		
1	1	Прямая и отрезок
2	2	Луч и угол
3	3	Сравнение отрезков и углов
4	4	Измерение отрезков
	5	Решение задач по теме «Измерение отрезков»
5	6	Измерение углов
6	7	Смежные и вертикальные углы
	8	Перпендикулярные прямые
	9	Решение задач. Подготовка к контрольной работе
	10	Контрольная работа № 1
	11	Работа над ошибками
Глава II. Треугольники		
1	12	Треугольники
	13	Первый признак равенства треугольников
	14	Решение задач на применение первого признака равенства треугольников
	15	Медианы, биссектрисы и высоты треугольника
2	16	Свойства равнобедренного треугольника
	17	Решение задач по теме «Равнобедренный треугольник»
	18	Второй признак равенства треугольников
3	19	Решение задач на применение второго признака равенства треугольников
	20	Третий признак равенства треугольников
	21	Решение задач на применение признаков равенства треугольников
	22	Окружность
4	23	Примеры задач на построение
	24	Решение задач на построение
	25	Решение задач на применение признаков равенства треугольников
	26	Решение задач
	27	Решение задач. Подготовка к контрольной работе
	28	Контрольная работа № 2
	29	Работа над ошибками
Глава III. Параллельные прямые		
1	30	Признаки параллельности прямых
	31	Признаки параллельности прямых
	32	Практические способы построения параллельных прямых
	33	Решение задач по теме «Признаки параллельности прямых»
2	34	Аксиома параллельных прямых
	35	Свойства параллельных прямых
	36	Свойства параллельных прямых
	37	Решение задач по теме «Параллельные прямые»

Параграф учебника	Урок, №	Тема урока
	38	Решение задач по теме «Параллельные прямые»
	39	Решение задач
	40	Подготовка к контрольной работе
	41	Контрольная работа № 3
	42	Работа над ошибками
Глава IV. Соотношения между сторонами и углами треугольника		
1	43	Сумма углов треугольника
	44	Сумма углов треугольника. Решение задач
2	45	Соотношения между сторонами и углами треугольника
	46	Соотношения между сторонами и углами треугольника
	47	Неравенство треугольника
	48	Решение задач. Подготовка к контрольной работе
	49	Контрольная работа № 4
	50	Анализ контрольной работы
3	51	Прямоугольные треугольники и некоторые их свойства
	52	Решение задач на применение свойств прямоугольного треугольника
	53	Признаки равенства прямоугольных треугольников
	54	Прямоугольный треугольник. Решение задач
4	55	Расстояние от точки до прямой. Расстояние между параллельными прямыми
	56	Построение треугольника по трем элементам
	57	Построение треугольника по трем элементам
	58	Построение треугольника по трем элементам. Решение задач
	59	Решение задач на построение
	60	Решение задач. Подготовка к контрольной работе
	61	Контрольная работа № 5
	62	Анализ контрольной работы
Глава V. Повторение		
	63	Повторение темы «Начальные геометрические сведения»
	64	Повторение темы «Признаки равенства треугольников. Равнобедренный треугольник»
	65	Повторение темы «Параллельные прямые»
	66	Повторение темы «Соотношения между сторонами и углами треугольника»
	67	Повторение темы «Задачи на построение»
	68(1)	Итоговая контрольная работа
	68(2)	Итоговый контрольный тест
		Приложение 1. (Контрольные работы)
		Приложение 2. (Обобщающие таблицы)
		Приложение 3. (Карточки для индивидуальной работы с учащимися)

ГЛАВА I

НАЧАЛЬНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ (уроки 1–11)

Начальные понятия планиметрии. Геометрические фигуры. Понятие о равенстве фигур. Отрезок. Равенство отрезков. Длина отрезка и ее свойства. Угол. Равенство углов. Величина угла и ее свойства. Смежные и вертикальные углы и их свойства. Перпендикулярные прямые.

Основная цель – систематизировать знания учащихся об основных свойствах простейших геометрических фигур, ввести понятие равенства фигур.

Материал данной темы посвящен введению основных геометрических понятий. Введение основных свойств простейших геометрических фигур проводится на основе наглядных представлений учащихся путем обобщения очевидных или известных из курса математики I-VI классов геометрических фактов. Принципиальным моментом данной темы является введение понятия равенства геометрических фигур на основе наглядного понятия наложения.

Основное внимание в учебном материале этой темы уделяется двум аспектам: понятию равенства геометрических фигур (отрезков и углов) и свойствам измерения отрезков и углов, что находит свое отражение в заданной системе упражнений.

Изучение данной темы должно также решать задачу введения терминологии, развития навыков изображения планиметрических фигур и простейших геометрических конфигураций, связанных с условиями решаемых задач. Решение задач данной темы следует использовать для постепенного формирования у учащихся навыков применения свойств геометрических фигур как опоры при решении задач, первоначально проговаривая в ходе решения устных задач.

На изучение темы отведено 10 часов плюс 1 час за счет часов повторения на анализ контрольной работы.

Урок 1. Прямая и отрезок

Цели урока:

1) систематизация знаний о взаимном расположении точек и прямых;
2) познакомить учащихся со свойством прямой (через любые две точки можно провести прямую и притом только одну);
3) рассмотреть прием практического проведения прямых на плоскости (провешивание).

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока и сформулировать цели.

II. Вводная беседа

Вводную беседу можно провести, используя текст введения к учебнику, приложение 2 учебника и дополнительную литературу.

Геометрия – одна из наиболее древних наук. Первые геометрические факты найдены в вавилонских клинописных таблицах и египетских папирусах (III тысячелетие до нашей эры), а также в других источниках. Название науки «геометрия» древнегреческого происхождения, оно составлено из двух древнегреческих слов: «ge» — «земля» и «metreo» — «измеряю» (землю измеряю).

Появление и развитие геометрических знаний связано с практической деятельностью людей. Это отразилось и в названиях многих геометрических фигур. Например, название фигуры *трапеция* происходит от греческого слова *trapezion* — *«столик»*, от которого произошло также слово *«трапеза»*. Термин *линия* возник от латинского *linum* – «лен, льняная нить». Практические потребности людей (сооружение жилищ, храмов, желание украсить одежду, рисовать картины) способствовали приобретению и накоплению геометрических сведений, которые изначально передавались в устной форме из поколения в поколение. Новые сведения и факты добывались опытным путем, выводились некоторые правила (например, правило вычисления площадей) и данная наука не являлась точной. И только в VI веке до нашей эры древнегреческий ученый Фалес начал получать новые геометрические сведения с помощью доказательств. В III веке до нашей эры греческий ученый Евклид написал сочинение «Начала» и почти два тысячелетия геометрия изучалась по этой книге, а наука в честь ученого была названа евклидовой геометрией.

В настоящее время геометрия – это целая наука, занимающаяся изучением геометрических фигур.

Далее целесообразно продолжить беседу, опираясь на ранее полученные знания в курсе математики 1–6 классов, в виде ответов на вопросы.

– Какие геометрические фигуры вам известны?

Возможные ответы учащихся можно записать на доске, распределив их на две группы следующим образом:

прямая	куб
ломаная	цилиндр
отрезок	шар
луч	конус
прямоугольник	пирамида
квадрат	параллелепипед
многоугольник	

– По какому принципу данные геометрические фигуры записаны в двух различных группах? (*В первой группе записаны фигуры, существующие на плоскости, а во второй группе – фигуры, существующие в пространстве*).

Часть геометрии, в которой рассматриваются фигуры на плоскости, называется планиметрией, а та часть, в которой рассматриваются фигуры в пространстве, называется стереометрией. Мы начнем изучение геометрии с планиметрии.

III. Изучение нового материала

В курсе математики учащиеся уже знакомы с понятиями *прямая*, *отрезок*, умеют их обозначать, чертить, знают о принадлежности точек прямой и отрезку, поэтому нет необходимости повторять уже известные факты. Будет целесообразнее организовать повторение данной темы в ходе выполнения следующих упражнений при параллельном введении новых понятий, определений и т.д.

К доске вызывается один из учащихся, остальные работают в тетрадях. Учитель читает задание и по мере необходимости вводит новые понятия, символы, делает необходимые записи на доске.

1. Начертите прямую. Как ее можно обозначить? (*Прямая a или AB, см. рис. 1.1.*)
2. Отметьте точку C, не лежащую на данной прямой, и точки D, E, K, лежащие на этой же прямой (*рис. 1.2*).

В математике существуют специальные символы, позволяющие кратко записать какое-либо утверждение. Символы $\in$ и $\notin$ означают соответственно «принадлежит» и «не принадлежит» и называются ***символами принадлежности***.

3. Используя символы принадлежности, запишите предложение «Точка D принадлежит прямой AB, а точка C не принадлежит прямой a». ($D \in AB$, $C \notin a$.)
4. Используя рисунок 1.3 и символы $\in$ и $\notin$, запишите, какие точки принадлежат прямой b, а какие – нет. ($F, B, A, C \in b$; $K, E, N \notin b$.)

– Сколько прямых можно провести через заданную точку A? (*Через заданную точку A можно провести множество прямых.*)

– Сколько прямых можно провести через две точки? (*Одну прямую.*)

– Через любые две точки можно провести прямую? (*Да.*)

Итак, через любые две точки можно провести прямую и притом только одну.

Это утверждение назовем **свойством прямой**.

5. Начертите прямые XY и MK, пересекающиеся в точке O (*рис. 1.4*).

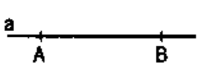


Рис. 1.1

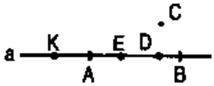


Рис. 1.2

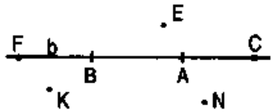


Рис 1.3

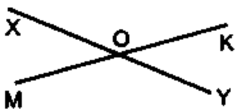


Рис. 1.4

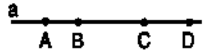


Рис. 1.5

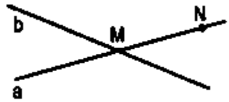


Рис. 1.6

Для того, чтобы кратко записать, что прямые XY и MK пересекаются в точке O, используют символ $\cap$ и записывают так: $XY \cap MK = O$.

– Сколько общих точек может быть у двух прямых? (*Две прямые могут иметь или одну общую точку или ни одной общей точки.*)

6. На прямой a отметьте последовательно точки A, B, C, D. Запишите все получившиеся отрезки. (*Получились отрезки AB, BC, CD, AC, AD, BD, рис. 1.5*).
7. Начертите прямые a и b, пересекающиеся в точке M. На прямой a отметьте точку N, отличную от точки M.
   а) Являются ли прямые MN и a различными прямыми?
   б) Может ли прямая b проходить через точку N?

Решение (см. рис. 1.6):

а) Прямая MN и прямая a совпадают, то есть это одна и та же прямая.

б) Прямая b не может проходить через точку N, так как она уже проходит через точку M, а через точки M и N можно провести прямую и притом только одну (это прямая a).

8. Дана прямая EF, $A \notin EF$, $B \in EF$. Может ли прямая AB не пересекать отрезок EF? (*Не может. Рис. 1.7.*)

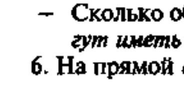


Рис 1 7

Для решения задач 6–8 можно преложить учащимся сделать рисунки и дать 1–2 минуты на обдумывание ответа, а затем обсудить различные варианты ответов.

IV. Закрепление изученного материала

В зависимости от подготовленности учащихся можно предложить задания для самостоятельного решения следующим образом:

I уровень

Решить задачи № 2, 5, 6 учебника.

II уровень

Решить задачи:

1) Сколько точек пересечения могут иметь три прямые? Рассмотрите все возможные случаи и сделайте соответствующие рисунки. (*Ответ*: см. рис. 1.8: а) 3 точки пересечения; б) 1 точка пересечения; в) 2 точки пересечения; г) ни одной точки пересечения.)
2) На плоскости даны три точки. Сколько прямых можно провести через эти точки так, чтобы на каждой прямой лежали хотя бы две из данных точек? Рассмотрите все возможные случаи и сделайте рисунки. (*Ответ*: см. рис. 1.9: а) 1 прямая; б) 3 прямые.)

Желательно, чтобы в ходе самостоятельного решения задач учитель контролировал работу учащихся, решающих задачи I уровня сложности с целью проверки успешности усвоения темы урока и своевременной помощи при возникающих у учащихся затруднениях.

В конце урока заслушать учащихся, выполняющих задачи II уровня сложности, выполнив на доске необходимые рисунки. При этом учитель должен обратить внимание на то, чтобы учащиеся, не решавшие данные задачи, поняли суть решения.

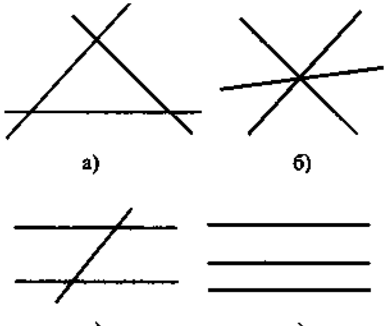


Рис. 1.8

Домашнее задание

1. § 1, 2, вопросы 1–3.
2. Решить задачи. I уровень – №1–4 из рабочей тетради; II уровень – № 1, 3, 4, 7.
3. *Дополнительная задача:*

Сколько различных прямых можно провести через четыре точки? Рассмотрите все случаи и сделайте рисунки.

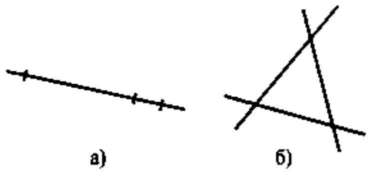


Рис 1.9

В конце данного урока желательно обратить внимание учащихся на то, что дома надо внимательно прочитать пункты 1 и 2, и к следующему уроку подготовить ответы на вопросы 1–3 на стр. 25 учебника. Пункт 2 на уроке не рассматривался, ученики дома должны самостоятельно с ним ознакомиться. Задачи № 1, 3, 4, 7 рещить в тетради всем учащимся, а дополнительную задачу – желающим, но за верное решение дополнительной задачи можно получить хорошую оценку.

Такие же напоминания можно сделать еще на нескольких уроках.

Урок 2. Луч и угол

Цели урока:

1) повторить, что такое луч, начало луча, угол, его стороны и вершины;
2) ввести понятие внутренней и внешней областей неразвернутого угла;
3) ознакомить учащихся с различными обозначениями луча и угла.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели.

II. Проверка домашнего задания

1. Теоретический опрос по вопросам 1–3.

2. Как называется прием для «проведения» длинных отрезков прямых на местности? Для чего и как он используется?

3. Проверить письменную часть домашнего задания – решения задач № 3, 4 и дополнительной задачи попросить подготовить у доски трех учащихся до урока. Задачу № 7 можно проверить устно.

Задача № 3

Рис. 1.10.

а) $a \cap b = O$, $b \cap c = O$, $c \cap a = O$. Получилась одна точка пересечения.

б) $a \cap b = M$, $b \cap c = K$, $c \cap a = P$. Получилось три точки пересечения.

Задача № 4

Рис. 1.11.

4 прямые: *AC*, *BD*, *CD*, *AD*.

Задача № 7

На рисунке всего 6 отрезков: *AB*, *AC*, *AD*, *BC*, *BD*, *CD*.

а) точка *C* лежит на отрезках *AC*, *AD*, *BC*, *BD*, *CD*.

б) точка *B* лежит на отрезке *CD*.

Дополнительная задача

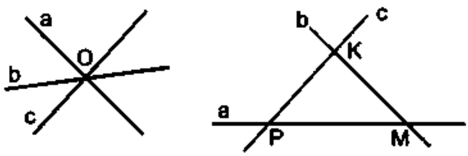
Через четыре точки можно провести одну, четыре или шесть прямых (см. рис. 1.12).

III. Дифференцированное решение задач

Индивидуальная работа в рабочих тетрадях: 3–4 ученика решают задачи №5–8 и тетради сдают на проверку до начала изучения нового материала.

Задача № 5

Прямые *m* и *n* пересекаются в точке *C*, а точка *H*, отличная от точки *C*, лежит на прямой *m*. Лежит ли точка *H* на прямой *n*?



а) б)

Рис. 1.10

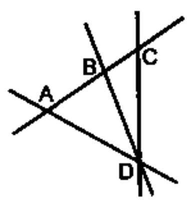
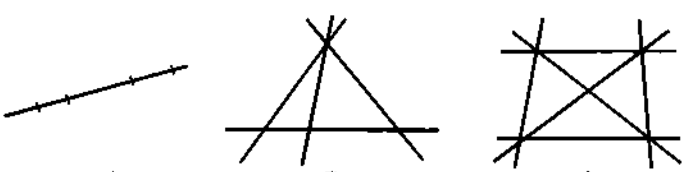


Рис. 1.11



а) б) в)

Рис 1.12

Объясните ответ.

Решение. $H \notin n$, так как по условию задачи прямые m и n имеют общую точку C, а двух общих точек две прямые иметь не могут. (*Ответ:* Точка H не лежит на прямой n.)

Задача № 6

Отметьте на прямой MK две точки: точку A, лежащую на отрезке MK, и точку B, которая не лежит на отрезке MK. Какая из точек – A или B – лежит между точками M и K? (*Ответ:* Между точками M и K лежит точка А.)

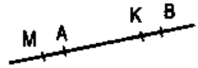


Рис к задаче №6

Задача № 7

Пересекаются ли на рисунке: а) отрезки EH и AB, EH и BC, HK и AB; б) отрезок EH и прямая BC, отрезок HK и AB? (*Ответ:* а) Отрезки EH и AB пересекаются; отрезки EH и BC не пересекаются; б) Отрезок EH и прямая BC пересекаются; отрезок AK и прямая AB не пересекаются.)

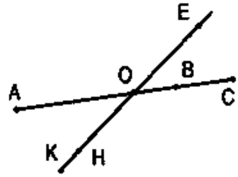


Рис. к задаче 7

Задача № 8

Выпишите все отрезки, изображенные на рисунке к задаче 7:

а) на которых точка B лежит, но не является их концом;

б) концом которых является точка B.

(*Ответ:* а) AC, OC; б) BC, BO, AB.)

I уровень

(Математический диктант с последующей проверкой. Учащиеся записывают ответы в тетрадях, которые проверяют они сами в конце диктанта по ответам, заранее подготовленным на доске.)

Используя рисунок 1.13:

а) Назовите все отрезки. (AB, BD, AD, DC, BC, DM, AM.)

б) Назовите все прямые. (AD, BC.)

в) Какие точки принадлежат прямой AD, а какие не принадлежат? Ответ запишите, используя математические символы. (A, D, $M \in$ *прямой* AD; B, E, $C \notin$ *прямой* AD.)

г) Какие точки принадлежат отрезку BD, а какие не принадлежат? Ответ запишите, используя математические символы. (B, $D \in$ *отрезку* BD; A, M, E, $C \notin$ BD.)

д) Укажите такую точку, которая принадлежит и прямой BC, и прямой AM. Как еще можно назвать указанную точку? (D; D – *точка пересечения прямых* BC, AM.)

II уровень

(Самостоятельная работа обучающего характера. Тетради учащихся по их желанию можно собрать на проверку в конце урока.)

1. Сколько точек надо взять между точками A и B (см. рис. 1.14), чтобы вместе с отрезком AB

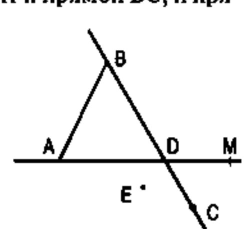


Рис. 1.13

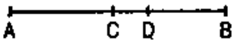


Рис 1.14

получилось шесть различных отрезков? (2 точки: *C* и *D*. Получаются отрезки *AB, AC, AD, CD, CB, DB.*)

2. Сколько точек пересечения могут иметь четыре попарно пересекающиеся прямые? Для каждого случая сделайте рисунок. (Рис. 1.15: а) 6 точек пересечения; б) 4 точки пересечения; в) 1 точка пересечения.)

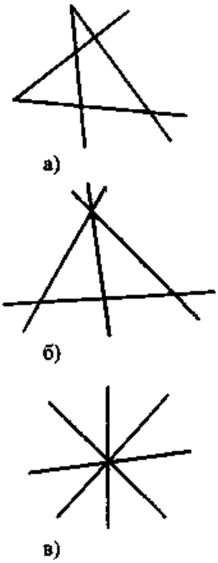


Рис 1 15

IV. Изучение нового материала

Тема «Луч и угол», как и предыдущая, рассматривались в курсе математики 5–6 классов, поэтому изучение темы можно организовать, опираясь на уже имеющиеся у учащихся знания, в ходе решения следующих задач (при решении задач №1, 5, 8 один ученик работает у доски, остальные – в тетрадях; задачи №2, 3, 4, 6 решаются устно. Все задачи читает учитель и постепенно вводит новые понятия.)

Задача 1

Начертите прямую *a* и отметьте на ней точку *O.* Как называется часть прямой, состоящая из всех точек, лежащих по одну сторону от точки *O*? Как называется точка *O*? (*Ответ*: Луч, *O* – начало луча.)

На доске и в тетрадях учащихся рисунок (см. рис. 1.16).

Задача 2

Назовите лучи, изображенные на рис. 1.17. (*Ответ*: Лучи *a*, *AB*, *AC*, *EK.*)

Учителю необходимо обратить внимание учащихся на то, что в случае обозначения луча двумя большими латинскими буквами первая буква обозначает начало луча, а вторая – какую-нибудь точку на луче.

Задача 3

Сколько лучей, выходящих из точки *A*, изображено на рис. 1.18? Какие лучи совпадают? Какие лучи вместе с их обычным началом составляют прямую? (*Ответ*: 3 луча: *AK*, *AB*, *AN*; совпадают лучи *AB* и *AE, AM* и *AN*; прямую, вместе с их общем началом составляют лучи *AK* и *AE*, *BK* и *BE.*)

Задача 4

– Как называется фигура, изображенная на рис. 1.19? *(Угол.)*

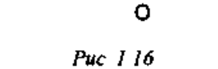


Рис 1 16

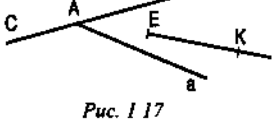


Рис. 1 17

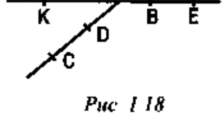


Рис 1 18

– Из каких геометрических фигур состоит угол? *(Угол – это геометрическая фигура, состоящая из точки и исходящих из нее двух лучей.)*

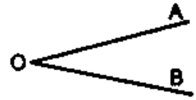


Рис. 1.19

– Как называется точка, из которой исходят данные лучи? Как она обозначена на рисунке? *(Вершина угла, точка O.)*

– Как называются лучи, исходящие из вершины угла? Назовите указанные лучи на рисунке. *(Стороны угла, OA и OB.)*

– Как обозначается угол, изображенный на рисунке? *($\angle AOB$.)*

Угол можно обозначить еще одним способом: $\angle ab$, где лучи a, b – стороны угла.

Задача 5

Начертите развернутый и неразвернутый углы. Чем они отличаются друг от друга? (*Ответ*: Стороны развернутого угла с вершиной угла составляют одну прямую, каждая сторона развернутого угла является продолжением другой стороны.)

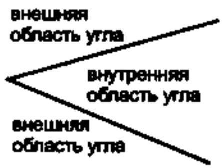


Рис. 1.20

Задача 6

На сколько частей делится плоскость сторонами угла? *(На две.)*

У неразвернутого угла стороны делят плоскость на *внутреннюю* и *внешнюю* область данного угла. У развернутого угла любая из двух частей может считаться его внутренней областью.

Рис. 1.21

На доске и в тетрадях учащихся: рис. 1.20, рис. 1.21.

Задача 7

По рис. 1.22 назовите точки, принадлежащие:

а) внешней области угла;

б) внутренней области угла;

в) сторонами угла.

(*Ответ*: а) D, P, N; б) E, K, M; в) A, B, O, C.)

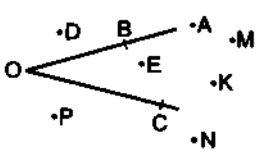


Рис. 1.22

Задача 8

Начертите угол MNK и проведите луч NE, исходящий из вершины данного угла и проходящий внутри угла. На сколько углов поделил этот луч данный угол? Сколько всего углов получилось? (*Ответ*: Рис. 1.23. Луч поделил данный угол на два угла. Всего получилось три угла: $\angle MNK$, $\angle MNE$, $\angle ENK$.)

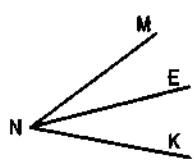


Рис. 1.23

V. Закрепление изученного материала

Изучение нового материала построено таким образом, что большинству учащихся можно уже предложить задания II уровня сложности для самостоятельного решения.

I уровень

Решить задачи учебника № 8, 9, 10, 12. (Учащимся, не усвоившим или недостаточно усвоившим новый материал, можно предложить решить задачи №9–12 из рабочей тетради. Работу этих учащихся учитель держит под постоянным контролем.)

II уровень

Решить дополнительные задачи:

Задача 1

Дан неразвернутый угол ABC. Проведите лучи с началом в точке B так, чтобы образовалось шесть углов, один из которых был бы развернутым. (*Ответ*: Рис. 1.24. Проведены лучи BD и BK. Образовались углы: $\angle ABD$, $\angle ABC$, $\angle ABK$, $\angle DBC$, $\angle DBK$, $\angle CBK$; $\angle ABK$ – развернутый.

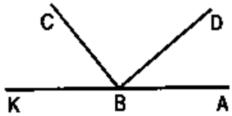


Рис 1 24

Задача 2

Сколько неразвернутых углов образуют три прямые? (*Ответ*: Возможны различные случаи в зависимости от расположения прямых. Рис. 1.25: а) 12 неразвернутых углов: $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$, $\angle DOE$, $\angle EOF$, $\angle FOA$, $\angle AOC$, $\angle BOD$, $\angle COE$, $\angle DOF$, $\angle EOA$, $\angle FAB$; б) 12 неразвернутых углов; в) 8 неразвернутых углов; г) ни одного неразвернутого угла.)

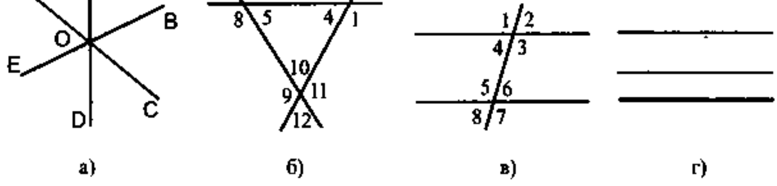
Домашнее задание

1. § 2, вопросы 4–6.
2. Решить задачи. I уровень – задачи №13–16 из рабочей тетради; II уровень – №11, 13, 14.
3. Дополнительные задачи № 71, 72.

Урок 3. Сравнение отрезков и углов

Цели урока:

1) ввести понятие равенства геометрических фигур;



а) б) в) г)

Рис 1 25

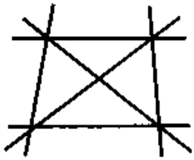


Рис. 1.26

Рис. 1.27

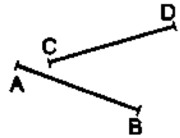


Рис. 1.28

2) научить сравнивать отрезки и углы;

3) ввести понятия середины отрезка и биссектрисы угла.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока и сформулировать цели.

II. Повторение. Проверка домашнего задания

1. Теоретический опрос по вопросам 4–6.

2. Проверить решение задач № 11, 13, 14 у части учащихся, собрав тетради.

3. Проверить решение дополнительных задач № 71, 72 через графопроектор или попросить успешно справившихся с заданием учащихся заранее подготовить на доске решение.

Задача № 71

См. рис. 1.26. 6 прямых.

Задача № 72

См. рис. 1.27. 6 точек пересечения.

III. Изучение нового материала

Изучение нового материала проводится в форме беседы учителя с учащимися. Важно, чтобы учитель и класс выслушали разные варианты ответов на поставленные вопросы, при этом учащиеся сами должны выбрать, какое из предложенных решений является верным.

– Как можно сравнить два прямоугольника? *(Учителю необходимо заготовить заранее 2 прямоугольника, вырезанные из картона или другого материала, одинаковые на первый взгляд.)*

Чтобы сравнить два прямоугольника, надо один прямоугольник наложить на другой, если из-за верхнего прямоугольника будет виден нижний, значит верхний прямоугольник меньше нижнего и наоборот. А если они совместятся, то данные прямоугольники равны.

– Как сравнить два треугольника, изображенных на доске (внешне два треугольника должны быть почти равными)? (*Скопировать один треугольник на прозрачный материал, например кальку, и наложить на второй.*)

– Какие две геометрические фигуры можно назвать равными? (*Две геометрические фигуры называются равными, если при наложении они совмещаются.*)

– Сравните отрезки *AB* и *CD*, изображенные на рис. 1.28, с помощью линейки без делений.

Решение:

а) наложить линейку на отрезок AB и отметить начало и конец данного отрезка;

б) наложить линейку на отрезок CD так, чтобы отмеченное начало отрезка AB совпадало с точкой C. Если отмеченнный конец отрезка AB совпадает с точкой D, то отрезки AB и CD равны. Если отмеченный конец отрезка AB будет лежать на отрезке CD, то отрезок AB меньше отрезка CD, а если будет лежать на прямой CD, но не на отрезке CD, то отрезок AB больше отрезка CD.

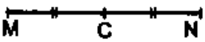


Рис. 1.29

Если отрезки AB и CD равны, пишут $AB = CD$. Если отрезок AB меньше (больше) отрезка CD, пишут $AB < CD$ ($AB > CD$).

— На рис. 1.29 точка C – середина отрезка MN. Что можно сказать об отрезках MC и CN? А об отрезке MN? ($MC = CN$, $MN = 2MC = 2CN$.)

— Как с помощью шарнирной модели угла можно сравнить два угла?

Решение:

а) Зафиксировать с помощью модели один из углов;

б) наложить зафиксированную модель на другой угол таким образом, чтобы у них совпали вершины и по одной стороне. Если вторая сторона модели угла будет проходить между сторонами второго угла, то первый угол меньше второго. Если вторая сторона модели угла не будет проходить между сторонами второго угла, а во внешней области второго угла, то первый угол больше второго. Если вторая сторона модели угла совместится со второй стороной другого угла, то данные углы равны.

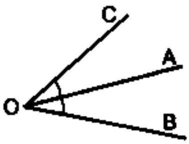


Рис. 1.30

— Сравните углы, изображенные на рисунке, с помощью шарнирной модели угла. Результат запишите с помощью знаков $<$, $>$, $=$ (на доске заранее заготовить различные углы, среди которых есть равные).

— Сравните $\angle AOB$ и $\angle CED$, если известно, что $\angle AOB$ – развернутый, $\angle CED$ – неразвернутый. ($\angle AOB > \angle CED$.)

Луч – исходящий из вершины углы и делящий его на два равныех угла, называется биссектрисой угла.

На доске и в тетрадях учащихся: рис. 1.30.

OA – биссектриса угла, если $\angle AOC = \angle BOA$.

— С помощью какого инструмента и как можно построить биссектрису данного угла? (***Биссектрису угла можно построить с помощью транспортира. Для этого нужно изменить градусную меру данного угла и провести луч, исходящий из вершины этого угла так, чтобы градусные меры образовавшихся углов были равны.***)

— Постройте $\angle AOB = 118°$, $\angle MNK = 68°$ и биссектрисы этих углов с помощью транспортира.

– Постройте неразвернутый угол *CED* и на глаз проведите его биссектрису. Результат построения проверьте с помощью транспортира.

IV. Закрепление изученного материала

I уровень

Решить задачи в учебнике № 19, 21, 22 самостоятельно под контролем учителя. (*Ответы:* №19 а) Да; б) Нет. №21 $\angle AOB > \angle AOC$. №22 а) Да; б) Нет.)

II уровень

Решить самостоятельно дополнительные задачи (см. ниже) с последующим обсуждением решения за 3–5 минут до конца урока.

Задача 1

На прямой *a* от точки *A* отложены два отрезка *AB* и *AC*, причем $AB < AC < 1{,}99AB$. Сравните отрезки *BC* и *AB*. (*Ответ*: Рис. 1.31: а) $AC < 1{,}99AB$, $AC < AB + 0{,}99AB$, тогда $BC < 0{,}99AB$ следовательно $BC < AB$; б) *AB* – часть *BC*, поэтому $BC < AB$.)

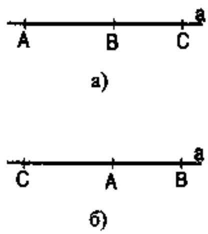


Рис. 1.31

Задача 2

На рис. 1.32. $\angle AOC = \angle BOD$, *OM* и *ON* – биссектрисы углов *AOB* и *COD*. Сравните углы *MON* и *AOC*. (*Ответ*: $\angle AOB = \angle COD$, так как $\angle AOC = \angle BOD$, а $\angle BOC$ – общая часть углов *AOC* и *BOD*.)

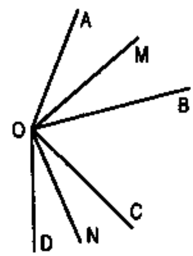


Рис. 1.32

Домашнее задание

1. § 3, вопросы 7–11.
2. Решить задачи. I уровень – №18, 19, 22, 23 из рабочей тетради; II уровень – №18, 20, 23 из учебника.

Задача № 18

На луче, исходящем из точки *A*, отмечены три точки *K*, *M* и *P* так, что точка *M* лежит между точками *A* и *P* и точка *K* лежит между точками *A* и *M*. Сравните отрезки *AK* и *AP*. Сделайте чертеж и объясните ответ.

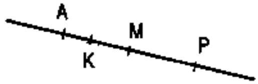


Рис. к задаче 18

Решение: По условию задачи *A–M–P*, поэтому отрезок *AM* – часть отрезка *AP*. Аналогично *A–K–M*, поэтому отрезок *AK* – часть отрезка *AM*. Следовательно, $AK \le AP$. (*Ответ:* $AK < AP$.)

Задача № 19

а) С помощью циркуля сравните отрезки *AB* и *CD*, *AB* и *BD*, *AC* и *CD*. Запишите результат сравнения и выясните, какая из точек – *B* или *C* – служит серединой отрезка *AD*.

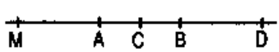


Рис к задаче 19

б) На прямой AD отметьте точку M так, чтобы точка C была серединой отрезка DM. (*Ответ:* а) $AB \le CD$, $AB = BD$, $AC \le CD$; середина отрезка AD – точка B.)

Задача № 22

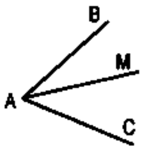


Рис к задаче 22

Луч AM делит угол BAC на два угла. Сравните углы BAM и BAC. Сделайте чертеж и объясните ответ.

Решение: Углы BAM и BAC имеют общую сторону AB, луч AM делит угол BAC на два угла, поэтому луч AM проходит внутри угла BAC, значит, угол BAM – часть угла BAC, поэтому $\angle BAM \le \angle BAC$. (*Ответ:* $\angle BAM \le \angle BAC$.)

Задача № 23

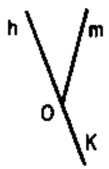


Рис. к задаче 23

Три луча h, k и m исходят из точки O, луч h является продолжением луча k. Сравните углы hk и km. Сделайте чертеж и объясните ответ.

Решение: По условию задачи луч h является <u>продолжением</u> луча k, значит, угол <u>hk</u> – развернутый. Угол km – неразвернутый, поэтому он составляет часть угла <u>hk</u>, т.е. $\angle hk \ge \angle km$. (*Ответ:* $\angle hk \ge \angle km$.)

3. *Дополнительная задача:*

OC – луч, принадлежащий внутренней области угла AOB. Как нужно провести луч OD, чтобы $\angle AOD = \angle COB$? Покажите на рисунке возможные варианты.

Урок 4. Измерение отрезков

Цели урока:

1) ввести понятие длины отрезка;
2) рассмотреть свойства длин отрезков;
3) ознакомить учащихся с различными единицами измерения и инструментами для измерения отрезков.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели.

II. Проверка домашнего задания

Теоретический опрос по вопросам 7–11.

III. Самостоятельная работа

Вариант I

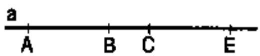


Рис 1 33

1. На прямой a от точки A в одном направлении отложены два отрезка AB и AC так, что $AC > AB$. От точки C на этой прямой отложите такой отрезок CE, чтобы $AC = BE$. Сравните отрезки CE и AB.

Решение: см. рис. 1.33: $AC = BE$, BC – общая часть AC и BE, значит $AB = CE$.

2. *Дано*: $\angle AOC = \angle BOD$, OM – биссектриса $\angle AOB$ (см. рис. 1.34). *Доказать*: OM – биссектриса $\angle COD$.

Решение: Так как OM – биссектриса $\angle AOB$, то $\angle AOM = \angle BOM$. По условию задачи $AOC = \angle BOD$, значит части углов AOM и BOM равны, т.е. $\angle COM = \angle DOM$ и OM – биссектриса $\angle COD$.

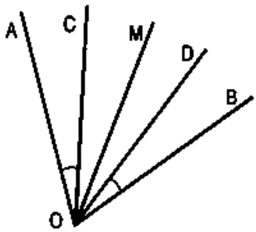


Рис. 1 34

3*. На сколько частей могут разделить плоскость три прямые? (*Ответ*: Рис. 1.35: а) на 6 частей; б) на 4 части; в) на 7 частей.)

Вариант II

1. На прямой *m* от точки *A* отложены два отрезка так, что $AC > AB$ и точка *A* лежит между точками *B* и *C*. От точки *C* отложен отрезок *CM* так, что $BM = AC$. Сравните отрезки *MC* и *AB*.

Решение (см. рис. 1.36): $BM = AC$, AM – общая часть BM и AC, значит $AB = MC$.

2. *Дано*: $\angle AOC = \angle BOC$, $\angle AOE = \angle BOF$ (см. рис. 1.37).

Доказать: OC – биссектриса $\angle EOF$.

Решение: Так как $\angle AOC = \angle BOC$ и $\angle AOE = \angle BOF$, то $\angle EOC = \angle FOC$, значит OC – биссектриса $\angle EOF$.

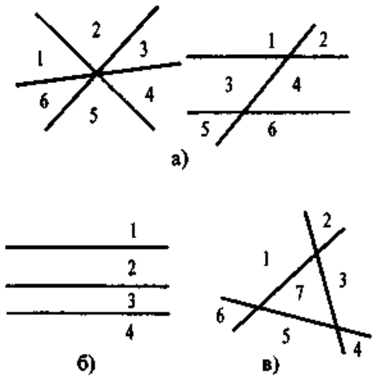


Рис. 1.35

3*. Даны три прямые, каждая из которых пересекает хотя бы одну другую. Сколько всего точек пересечения могут иметь такие прямые? (*Ответ*: Рис. 1.38: а) 1 точка пересечения; б) 2 точки пересечения; в) 3 точки пересечения.)

Рис. 1.36

Устное – решение задач №20, 21,24, из рабочей тетради.

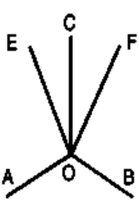


Рис 1 37

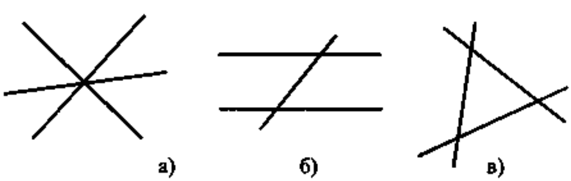


Рис. 1.38

IV. Изучение нового материала

Прочитать самостоятельно § 4 «Измерение отрезков» и ответить на вопросы (вопросы записать на доске):

– Какие основные единицы измерения длины нам известны? А дополнительные? (*Основные единицы измерения длины отрезка: мм, см, дм, м, км. Дополнительные единицы измерения длины отрезка: световой год (путь, который проходит свет в течение одного года), морская миля (1,852 км). Старинные единицы измерения длины: аршин (0,7112 м), сажень (2,1336 м), косая сажень (2,48 м), маховая сажень (1,76 м), локоть (0,45 м) и другие.*)

– Как найти длину отрезка, если точка делит его на два отрезка, длины которых известны? (*Если точка делит отрезок на два отрезка, то длина всего отрезка равна сумме длин этих двух отрезков.*)

– Какими инструментами пользуются для измерения расстояний? (*Для измерения расстояний используются масштабная миллиметровая линейка, штангенциркуль, рулетка.*)

Ответы на вопросы заслушать через 4–5 минут.

V. Закрепление изученного материала

1. Решить устно задачи №25 и №26 из рабочей тетради и задачу №26 из учебника.

Задача № 26. (*Ответ*: а) $CD = 6KL$; $EF = 5KL$; $PQ = 3KL$; $AB = 2KL$; б) $CD = 3AB$; $EF = 2{,}5AB$; $PQ = 1{,}5AB$; $KL = 1/2\ AB$.)

2. Решить задачу № 32 письменно (один ученик у доски, остальные – в тетрадях).

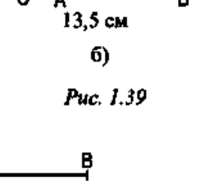


Рис. 1.39

Дано: A, B, $C \notin a$, $AB = 12$ см, $BC = 13{,}5$ см.

Найти: AC.

Решение: на прямой a отметим точки A, B, C. Возможны случаи (см. рис. 1.39):

а) Точка B лежит между точками A и C, тогда $AC = AB + BC$, $AC = 12$ см $+ 13{,}5$ см $= 25{,}5$ см.

б) Точка A лежит между точками B и C, тогда $AC = CB - AB$, $AC = 13{,}5$ см $- 12$ см $= 1{,}5$ см.

в) Точка C не может лежать между точками A и B, так как $AB < BC$.

(*Ответ*: 25,5 см или 1,5 см.)

3. Самостоятельное решение задач.

I уровень

Решить задачи № 28, 27, 31, 34 из учебника.

Задача № 27

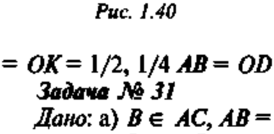


Рис. 1.40

Примем за единицу измерения отрезок AB и отложим его на луче от его начала, отметим 1 (см. рис. 1.40). Тогда $2AB = OC = 2$, $1/2\ AB = OK = 1/2$, $1/4\ AB = OD = 1/4$.

Задача № 31

Дано: а) $B \in AC$, $AB = 3{,}7$ см, $AC = 7{,}2$ см;

б) $B \in AC$, $AB = 4$ мм, $AC = 4$ см.

Найти: BC.

Решение (см. рис. 1. 41): Так как $B \notin AC$, то $AB + BC = AC$, $BC = AC - AB$.

а) $BC = 7{,}2$ см – 3,7 см = 3,5 см;

б) $BC = 4$ см – 4 мм = 3,6 см.

(*Ответ*: а) $BC = 3{,}5$ см; б) $BC = 3{,}6$ см.)

Рис. 1.41

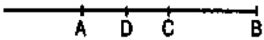


Рис. 1.42

Задача № 34

Дано: $AB = 64$ см, C – середина AB, D лежит на луче CA, $CD = 15$ см.

Найти: BD, DA.

Решение (см. рис. 1.42): $AB = 64$ см, C – середина AB, тогда $AC = CB = 32$ см. $CD = 15$ см, $DA = AC - DC = 32$ см – 15 см = 17 см. $BD = DC + CB$ = 15 см + 32 см = 47 см. (*Ответ*: $BD = 47$ см, $DA = 17$ см.)

II уровень

Решить задачи № 27, 34 и дополнительные задачи 1, 2 (см. ниже).

Задача 1

Длина отрезка AB равна 14 см. Найдите на прямой все такие точки D, для которых $DA = 3DB$.

Решение (см. рис. 1.43):

а) Если $D \in AB$, то $AD + DB = AB$. Так как $DA = 3DB$, $AB = 14$ см, то $3DB + DB = 14$ см, $DB = 3{,}5$ см, тогда $AD = 10{,}5$ см.

б) Если $B \in AD$, то $AB + BD = AD$. Так как $DA = 3DB$, $AB = 14$ см, то $14 + DB = 3DB$, $DB = 7$ см, тогда $AD = 21$ см.

в) Точка $A \notin BD$, так как $DA > DB$ по условию задачи.

(*Ответ*: если $D \in AB$, то $AD = 10{,}5$ см, $DB = 3{,}5$ см; если $B \in AD$, то $DB = 7$ см, $AD = 21$ см.)

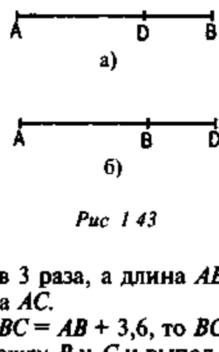


Рис 1 43

Задача 2

2) Точки A, B и C лежат на одной прямой, причем длина отрезка BC больше длины отрезка AC в 3 раза, а длина AB меньше длины BC на 3,6 см. Найдите длину отрезка AC.

Решение: Так как по условию задачи $BC = 3AC$, $BC = AB + 3{,}6$, то BC больше AC и больше AB, поэтому точка A лежит между B и C и выполняется равенство $BA + AC = BC$. Так как $BC = 3AC$, то $AC = 1/3\ BC$; $BC = AB + 3{,}6$, то $AB = BC - 3{,}6$; тогда $BC - 3{,}6 + 1/3\ BC = BC$, $BC = 10{,}8$ см, $AC = 3{,}6$ см. (*Ответ*: $AC = 3{,}6$ см.)

В ходе самостоятельного решения задач учитель оказывает индивидуальную помощь менее подготовленным учащимся и учащимся, у которых возникли вопросы. В конце урока можно выборочно или у всего класса собрать тетради.

Домашнее задание

1. § 4, вопросы 12–13.
2. Решить задачи. I уровень – №27, 28, 29 из рабочей тетради; II уровень – №25, 29, 33 из учебника.

Задача № 27

На рисунке с помощью масштабной линейки отметьте на прямой AB точку M так, чтобы $BM = 20$ мм.

а) Сколько таких точек можно отметить на прямой AB?

б) Измерьте в миллиметрах длину отрезка AM в каждом из случаев.

(*Ответ:* а) <u>две</u>; б) $AM = 10$ мм или $AM = 30$ мм.)

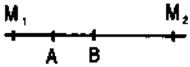


Рис к задаче 27

Задача № 28

Точки K, P и O лежат на одной прямой. Каким может быть расстояние KO, если $KP = 3$ см, $PO = 1{,}5$ см?

Решение: Расстоянием между точками K и O называется длина отрезка KO. Возможны два случая:

а) Точка O лежит на луче PK (сделайте чертеж). В этом случае $KO + OP = \underline{KP}$, т.е. $KO + 1{,}5 = \underline{3}$, откуда $KO = \underline{1{,}5}$ см.

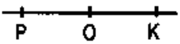


Рис к задаче 28а

б) Точка O лежит на продолжении луча $\underline{PK}$ (сделайте чертеж). В этом случае $KP + PO = \underline{KO}$, т.е. $KO = \underline{4{,}5}$ см.

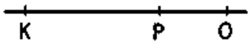


Рис. к задаче 28б

(*Ответ*: $KO = \underline{1{,}5}$ см или $KO = \underline{4{,}5}$ см.)

Задача № 29

Длина отрезка BC на рисунке равна a. Известно, что точка – M середина отрезка OC. Отметьте точки M и K на рисунке. Найдите расстояние MK.

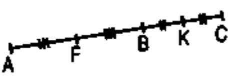


Рис. 1.44

Решение: По условию задачи точка M – середина отрезка $\underline{BO}$, поэтому $MO = 1/2\ BO$; точка K – середина отрезка OC, поэтому $OK = 1/2\ OC$. $MK = MO + OK = 1/2\ BO + 1/2\ OC = 1/2\ (BO + OC) = 1/2\ BC = 1/2a$. (*Ответ*: $MK = 1/2\ a$.)

3. *Дополнительная задача:*

Дано: $AF = FB$, $BK = KC$, $AC = 5$ см (см. рис. 1.44).

Найти: FK.

Урок 5. Решение задач по теме «Измерение отрезков»

Цели урока:

1) научить учащихся решать задачи на нахождение длины части отрезка или всего отрезка;
2) развивать логическое мышление.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели.

II. Повторение. Проверка домашнего задания

1. Проверить решение дополнительной домашней задачи.

Решение задачи желательно попросить оформить на доске одного из учащихся до начала урока.

Решение: По условию задачи $AF = FB$, $BK = KC$, тогда $AF + FB + BK + KC = AC$, $2FB + 2BK = 5$ см, $FB + BK = 2{,}5$ см, $FB + BK = FK$, поэтому $FK = 2{,}5$ см. (*Ответ*: $FK = 2{,}5$ см.)

2. Решение задач по готовым чертежам (устно, рисунки подготовить на доске заранее).

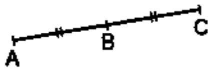


Рис 1.45

а) $BC = 2{,}5$ см (рис. 1.45).

Найти: AC. (*Ответ*: $AC = 5$ см.)

б) $AD = 42$ см, $BC = 11$ см (рис. 1.46).

Найти: AB. (*Ответ*: $AB = 20$ см.)

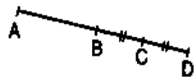


Рис. 1 46

в) $AB : AC = 5 : 4$ (рис. 1.47).

Найти: AB. (*Ответ*: $AB = 10$ дм.)

3. Решение задач (письменно) № 38, 40.

Задача № 38

(Один ученик решает у доски, остальные — в тетрадях.)

Дано: O, A, B лежат на одной прямой, $OA = 12$ см, $OB = 9$ см.

Найти: расстояние между серединами отрезков OA и OB.

Решение: Пусть M — середина отрезка OA, N — середина отрезка OB. Возможны два случая (см. рис. 1.48):

а) Если точка O лежит на отрезке AB, то $MO = AO : 2 = 6$ см, $NO = BO : 2 = 4{,}5$ см. Расстояние между серединами отрезков OA и OB равно длине отрезка MN, а $MN = MO + ON = 6$ см $+ 4{,}5$ см $= 10{,}5$ см.

б) Если точка O не лежит на отрезке AB, то $MO = AO : 2 = 6$ см, $NO = BO : 2 = 4{,}5$ см. $MN = MO - ON = 6$ см $- 4{,}5$ см $= 1{,}5$ см.

(*Ответ*: а) 10,5 см; б) 1,5 см.)

Наводящие вопросы к задаче №38 (задавать по мере необходимости).

а) 1) Что вы можете сказать об отрезках AM и MO? Чему равны их длины?

2) Чему равны длины отрезков ON и NB?

3) Чему равно расстояние между серединами отрезков OA и OB?

б) Какая из трех точек O, A или B лежит между двумя другими, если точка O не лежит на отрезке AB, $OA = 12$ см, $OB = 9$ см?

2) Где расположены точки M и N? Почему?

3) Как найти длину отрезка MN?

Задача № 40

(Предложить учащимся решить самостоятельно, а затем проверить решение задачи с помощью графопроектора.)

Дано: $AB = 28$ см, $C, D \in AB$, M — середина AC, N — середина DB. $MN = 16$ см.

Найти: CD.

Рис. 1.47

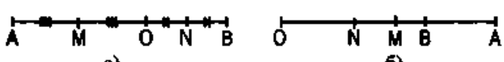


Рис. 1 48

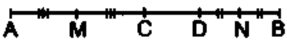


Рис. 1.49

Решение (см. рис. 1.49): $AB = AM + MN + NB = 28$ см $- 16$ см $= 12$ см. M – середина AC, значит $AM = MC$, N – середина BD, значит $BN = ND$. Так как $AM + NB = 12$ см, $AM = MC$, $BN = ND$, то $MC + DN = 12$ см. $MN = C + CD + DN = 16$ см, $MC + DN = 12$ см, значит $CD = MN - (MC + DN) = 16$ см $- 12$ см $= 4$ см.

Если учащиеся с решением задачи не справились, то можно задать *наводящие вопросы.*

1) На сколько отрезков разбит отрезок AB точками M, N, C, D?
2) Что вы можете сказать об этих отрезках?
3) Длина какого отрезка равна 16 см?
4) Чему равна сумма длин отрезков AM и NB? А сумма длин отрезков MC и DN?
5) Чему равна длина отрезка CD?

III. Самостоятельная работа

I уровень

Вариант I

1. На отрезке AB взяты точки C и D. Найдите длину отрезка CD, $AB = 12$ см, $AC = 3$ см, $BD = 4$ см.

2. На отрезке AB длиной 36 см взята точка K. Найдите длину отрезков AK и BK, если AK больше BK на 4 см.

3. На прямой отмечены точки A, B, C так, что $AB = 27$ м, $AC = 11$ м, $BC = 16$ м. Какая из этих точек лежит между двумя другими?

Вариант II

1. На отрезке AB взяты точки C, а на отрезке CB – точка D. Найдите длину отрезка BD, если $AB = 15$ см, $CD = 7$ см, $AC = 6$ см.

2. На отрезке AB длиной 36 см взята точка K. Найдите длину отрезков AK и BK, если AK больше BK в 3 раза.

3. На прямой отмечены точки A, B, C так, что $AB = 7$ м, $AC = 21$ м, $BC = 28$ м. Какая из этих точек лежит между двумя другими?

II уровень

Вариант I

1. На отрезке AB взяты точки M и N. Известно, что $AB = 12$ см, $AM = 8$ см, $BN = 10$ см. Найдите длину отрезка MN.

2. На отрезке AB длиной 36 см взята точка K. Найдите длину отрезков AK и BK, если $AK : BK = 4 : 5$.

3. Дан отрезок $AB = 16$ см. Точка M – середина отрезка AB, точка K – середина отрезка MB. Найдите длину отрезка AK.

Вариант II

1. На отрезке AB длиной 12 см взяты точки C так, что $AC = 10$ см, и точка D так, что $CD = 5$ см. Найдите длину отрезка BD.

2. На отрезке MN длиной 36 см взята точка K. Найдите длину отрезков MK и NK, если $MK : NK = 7 : 5$.

3. Точка M – середина отрезка AB, точка K – середина отрезка MB. Найдите длину отрезка AK, если $BK = 3$ см.

III уровень

Вариант I

1. На отрезке AB взята точка C. Известно, что $AB = 9$ см, $BC = 4$ см. Какую длину может иметь отрезок AC?

2. На отрезке AB длиной 36 см взята точка K. Найдите длину отрезков AK и BK, если $1/2\ AK$ равна $1/4\ BK$.

3. На отрезке $AB = 40$ см взята точка P. Найдите расстояние между серединами отрезков AP и PB.

Вариант II

1. На отрезке AB взята точка C. Известно, что $AB = 5$ см, $AC = 7$ см. Какую длину может иметь отрезок BC?

2. На отрезке AB длиной 21 см взята точка K. Найдите длину отрезков AK и BK, если $1/4\ AK$ равна $1/3\ BK$.

3. На отрезке AB взята точка P. Расстояние между серединами отрезков AP и PB равно 20 см. Найдите длину отрезка AB.

Домашнее задание

1. Решить задачи № 35, 36, 37, 39.

2. *Дополнительная задача:*

Длина отрезка $AB = 6$ см. Внутри отрезка взята точка M. Найдите длину отрезка BM, если:

а) $AM = 2BM$;

б) $2AM = 3BM$;

в) $AM : BM = 1 : 5$;

г) $AM : BM = 3 : 4$;

д) $AM - BM = 2$;

е) $2BM + 3AM = 14$.

Решение: $M \in AB$, значит, $AM + MB = AB$, $AB = 6$ см, следовательно, $AM + MB = 6$.

а) $AM = 2BM$, тогда $2BM + MB = 6$; $MB = 2$ см.

б) $2AM = 3BM$, тогда $AM = 1{,}5BM$, $1{,}5BM + BM = 6$, $MB = 2{,}4$ см.

в) $AM : BM = 1 : 5$, значит, $AM/BM = 1/5$, $AM = 1/5BM$, тогда $1/5BM + BM = 6$, $BM = 5$ см.

г) $AM : BM = 3 : 4$, значит, $AM/BM = 3/4AM = 3/4BM$, тогда $3/4BM + BM = 6$, $BM = 3 \cdot 3/7$см.

д) $AM - BM = 2$, значит, $AM = BM + 2$, тогда $BM + 2 + BM = 6$, $BM = 2$ см.

е) $2BM + 3AM = 14$, тогда $2 \cdot (AM + BM) + AM = 14$. Так как $AB = AM + MB = 6$, то $2 \cdot 6 + AM = 14$, $AM = 2$, $BM = 4$ см.

Урок 6. Измерение углов

Цели урока:

1) ввести понятие градуса и градусной меры угла;
2) рассмотреть свойства градусных мер угла, свойство измерения углов;

3) повторить виды углов;
4) ознакомить учащихся с приборами для измерения углов на местности.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Проверка домашнего задания

Проверяется решение дополнительной домашней задачи.

Учитель заранее готовит на доске рисунок к задаче и записывает условие задачи. По указанию учителя один из учащихся выходит к доске и рассказывает решение задачи под буквой а, остальные учащиеся слушают его, а затем идет обсуждение решения. Таким же образом проверяют решение задачи под буквой б и т.д.

III. Анализ ошибок самостоятельной работы

1. Общий анализ самостоятельной работы.
2. Работа над ошибками с использованием готовых решений задач самостоятельной работы. (Каждый из учащихся получает лист с готовым решением.)

Решения задач самостоятельной работы:

I уровень

Вариант I

1. Рис. 1.50. $AB = AC + CD + DB$. Так как $AB = 12$ см, $AC = 3$ см, $BD = 4$ см, то $CD = 12 - (3 + 4) = 5$ см. (*Ответ*: $CD = 5$ см.)

2. Рис. 1.51. $AK + KB = AB$. Так как $AB = 36$ см, а AK больше BK на 4 см, то $AK = BK + 4$, тогда $BK + 4 + BK = AB$, $2BK + 4 = 36$, $BK = 16$. Так как $BK = 16$ см, то $AK = 20$ см. (*Ответ*: $BK = 16$ см, $AK = 20$ см.)

3. Так как $AB = 27$ м, $AC = 11$ м, $BC = 16$ м, то $AB = AC + BC$, то есть C лежит между точками A и B. (*Ответ*: C лежит между точками A и B.)

Вариант II

1. Рис. 1.52. $AB = AC + CD + DB$. Так как $AB = 15$ см, $CD = 7$ см, $AC = 4$ см, то $BD = 15 - (7 + 6) = 2$ см. (*Ответ*: $BD = 2$ см.)

2. Рис. 1.53. $AK + KB = AB$. Так как AK больше BK в 3 раза, то $AK = 3BK$. $AB = 36$ см, тогда $3BK + BK = 36$, $BK = 9$ см, $AK = 27$ см. (*Ответ*: $BK = 9$ см, $AK = 27$ см.)

3. Так как $AB = 7$ м, $AC = 21$ м, $BC = 28$ м, то $BC = AB + AC$, то есть точка A лежит между точками B и C.

II уровень

Вариант I

1. Рис. 1.54. Так как $AB = 12$ см, $BN = 10$ см, $AM = 8$ см, то точки A, B, N и M расположены так, как показано на рисунке. $AB - AM = MB$, $MB = 12 - 8 = 4$ см. $MN = BN - MB = 10 - 4 = 6$ см. (*Ответ*: $MN = 6$ см.)

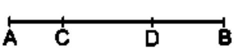


Рис. 1.50

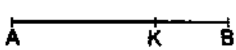


Рис 1 51

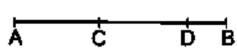


Рис 1 52

Рис. 1.53

Рис. 1.54

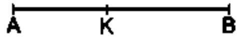


Рис 1.55

2. Рис. 1.55. $AK + KB = AB$. Так как $AK : BK = 4 : 5$, то $AK = 4x$, $BK = 5x$, $AB = 36$ см, тогда $4x + 5x = 36$ см, $x = 4$ см, значит, $AK = 16$ см, $BK = 20$ см. (*Ответ*: $AK = 16$ см, $BK = 20$ см.)

3. Рис. 1.56. Так как $AB = 16$ см, а M – середина AB, то $AM = 8$ см. Так как K – середина MB, то $MK = 4$ см. $AK = AM + MK = 8 + 4 = 12$ см. (*Ответ*: $AK = 12$ см.)

Вариант II

1. Рис. 1.57. Так как $AB = 12$ см, $AC = 10$ см, $CD = 5$ см, то точки D лежит между A и C. $CB = AB - AC = 12 - 10 = 2$ см. $DC + CB = BD$, значит, $BD = 2 + 5 = 7$ см. (*Ответ*: $BD = 7$ см.)

2. Рис. 1.58. $MK + KN = MN$. Так как $MK : NK = 7 : 5$, то $MK = 7x$ см, $NK = 5x$ см, $MN = 36$ см, тогда $7x + 5x = 36$ см, $x = 3$ см, значит, $MK = 21$ см, $NK = 15$ см. (*Ответ*: $MK = 21$ см, $NK = 15$ см.)

3. Рис. 1.59. K – середина MB, $BK = 3$ см, тогда $MB = 6$ см. Так как M – середина AB, то $AM = MB = 6$ см. $AK = AM + MK = 6 + 3 = 9$ см. (*Ответ*: $AK = 9$ см.)

III уровень

Вариант I

1. Рис. 1.60. Возможные случаи:

а) $AC = AB - BC = 9 - 4 = 5$ см.

б) $AC = AB + BC = 9 + 4 = 13$ см.

(*Ответ*: 5 см или 13 см.)

2. Рис. 1.61. $1/2\ AK = 1/4\ BK$. Так как $AK = 1/2\ BK$. $AK + KB = AB$, $AB = 36$ см, значит, $1/2\ KB + KB = 36$ см, $KB = 24$ см, тогда $AK = 1/2 \cdot 24 = 12$ см. (*Ответ*: $AK = 12$ см, $BK = 24$ см.)

3. Рис. 1.62. Если M – середина AP, N – середина PB, то $AM = MP$, $PN = NB$, $AB = AM + MP + PN + NB = 2MP + 2PN = 2\cdot(MP + PN) = 2MN$. $AB = 40$ см, тогда $MN = 20$ см. (*Ответ*: Расстояние между серединами отрезков AP и PB равно 20 см.)

Вариант II

1. Рис. 1.63.Возможные случаи:

а) $BC = AC - AB = 7 - 5 = 2$ см.

б) $BC = BA + AC = 7 + 5 = 12$ см.

(*Ответ*: 2 см или 12 см.)

Рис. 1.56

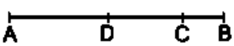


Рис. 1.57

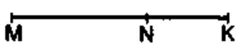


Рис. 1.58

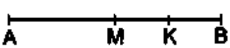


Рис. 1.59

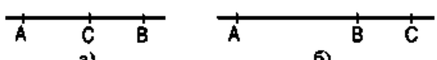


Рис. 1.60

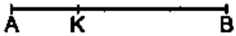


Рис. 1.61

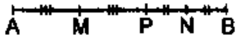


Рис 1.62

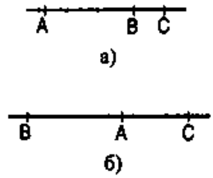


Рис. 1 63

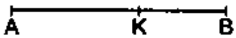


Рис. 1.64

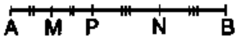


Рис. 1 65

2. Рис. 1.64. 1/4 AK = 1/3 BK. Тогда AK = 4/3 BK. $AK + KB = AB$, AB = 21 см, значит 4/3 $KB + KB$ = 21 см, BK = 9 см, AK = 12 см. (*Ответ*: BK = 9 см, AK = 12 см.)

3. Рис. 1.65. Если M – середина AP, N – середина PB, то $AM = MP$, $PN = NB$, $AB = AM + MP + PN + NB = 2MP + 2PN = 2 \cdot (MP + PN) = 2MN$. MN = 20 см, тогда AB = 40 см. (*Ответ*: AB = 40 см.)

IV. Изучение нового материала

Понятие градуса, градусной меры угла, развернутого и прямого углов было введено еще в 5 классе. Возможно, учащиеся знакомы еще и с острыми и тупыми углами. Поэтому можно предложить учащимся небольшую викторину, а ответы на вопросы викторины порекомендовать найти в пункте 9 и записать их в тетрадях.

Викторина

1. Единица измерения углов. (*Градус.*)
2. Положительное число, которое показывает, сколько раз градус и его части укладываются в данном угле. (*Градусная мера угла.*)
3. 1/180 часть развернутого угла. (*Градус.*)
4. 1/60 часть градуса. (*Минута.*)
5. 1/60 часть минуты. (*Секунда.*)
6. Градусная мера развернутого угла. (*180°.*)
7. Градусная мера прямого угла. (*90°.*)
8. Градусная мера неразвернутого угла. (*Меньше 180°.*)
9. Угол, градусная мера которого меньше 90°. (*Острый.*)
10. Угол, градусная мера которого больше 90°, но меньше 180°. (*Тупой.*)

После того, как проверены ответы викторины, осталось рассмотреть свойства:

1. **Равные углы имеют равные градусные меры.**
2. **Меньший угол имеет меньшую градусную меру.**
3. **Если луч делит угол на два угла, градусная мера всего угла равна сумме градусных мер этих углов.**

Это можно сделать в процессе решения устных задач (условия задач необходимо записать на доске):

1. $\angle A = \angle B$, $\angle A = 50°$, $\angle B$ = ? ($\angle B = 50°$)

2. $\Delta ABC = \Delta MNK$, $\angle A = 60°$, $\angle N = 70°$, $\angle C = 50°$.

Найти: $\angle B$, $\angle M$, $\angle K$.

– Сформулируйте свойство о градусной мере равных углов.

3. $\Delta\ OPK = \Delta\ STL$. Известно, что $\angle O$ меньше $\angle K$. Сравните $\angle S$ и $\angle L$.

4. $\angle A = 90°$, $\angle B$ меньше $\angle A$. Каким (тупым, острым, прямым и т.д.) может являться угол B? Ответ поясните. Сформулируйте свойство о градусной мере меньшего угла.

5. См. рис. 1.66.

а) *Дано:* $\angle AOC = 72°$, $\angle COB = 37°$.
Найти: $\angle AOB$.

б) *Дано:* $\angle AOB = 86°$, $\angle COB = 29°$.
Найти: $\angle AOC$.

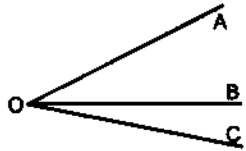


Рис. 1.66

6. Как найти градусную меру угла, если некоторым лучом он делится на два угла, градусные меры которых известны?

Пункт 10 «Измерение углов на местности» можно порекомендовать прочить дома.

V. Закрепление изученного материала

1. Фронтальная работа с классом. Устно решить задачи №32, 33, 34, 37, 38 из рабочей тетради и разобрать решение задач № 44, 47(б).

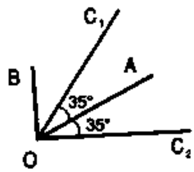


Рис к задаче 35

Задача № 35

С помощью транспортира отложите от луча OA угол AOC, равный 35°.

а) Сколько таких углов можно отложить от луча OA?

б) Измерьте угол COB в каждом из случаев.

(*Ответ*: а) <u>два</u>; б) $\angle COB = \underline{25°}$ или $\angle COB = \underline{95°}$.)

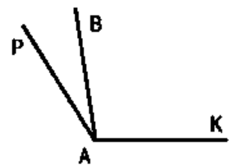


Рис. к задаче 36

Задача № 36

Луч AB делит угол KAP на два угла так, что угол KAB тупой. Сделайте чертеж. Может ли угол BAP быть тупым или прямым?

Решение: Так как луч AB делит угол KAP на два угла, то $\angle KAP = \angle KAB + \angle \underline{BAP}$. Предположим, что угол BAP тупой или прямой. Тогда $\angle KAP \geq 180°$, что невозможно. Значит, угол BAP – острый. (*Ответ*: *не может*.)

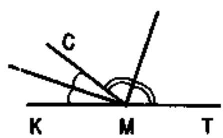


Рис. к задаче 39

Задача № 39

С помощью транспортира постройте биссектрисы углов KMC и CMT. Измерьте угол, образованный построенными биссектрисами, и запишите результат измерения. (*Ответ*: <u>90°</u>.)

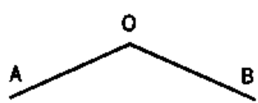


Рис. к задаче 40

Задача № 40

С помощью транспортира разделите угол AOB на три равных угла.

2. ***Задача № 44.***

Попросить выйти к доске трех учащихся и решить задачу в случае, если угол AOB острый, прямой или тупой.

Задача № 47(б)

$\angle AOB = \angle AOE + \angle EOB = 12°37' = 108°25' = 120°62' = 121°2'$.

3. Самостоятельное решение задач.

(Учитель контролирует работу менее подготовленных учащихся и по мере необходимости оказывает индивидуальную помощь.)

I уровень

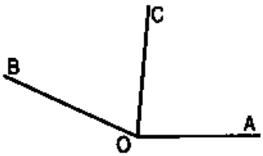


Рис. 1.67

Задачи по учебнику: № 47(а), 49, 51, 53.

Задача № 49

Рис. 1.67.

$\angle AOC$ на 15° больше $\angle COB$, значит $\angle AOC = \angle COB + 15°$. $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB = 155°$, тогда $\angle COB + \angle COB + 15° = 155°$, $\angle COB = 70°$. $\angle AOC = 70° + 15° = 85°$. (*Ответ*: $\angle AOC = 85°$.)

Задача № 51

$\angle AOD$ – прямой, $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = 30°$, так как $\angle AOD = 90°$. Пусть OM – биссектриса $\angle AOB$, а ON – биссектриса $\angle COD$, тогда $MOB = 15°$, $\angle CON = 15°$, $\angle MON = \angle MOB + \angle BOC + \angle CON = 15° + 30° + 15° = 60°$. (*Ответ*: 60°.)

Задача № 53

Градусная мера неразвернутого угла hk меньше 180°. Луч l, являясь его биссектрисой, делит угол hk на два равных угла, градусные меры которых меньше 90°, то есть на два острых угла. Поэтому угол hl не может быть прямым или тупым. (*Ответ*: не может.)

II уровень

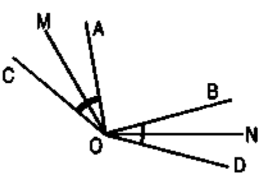


Рис 1.68

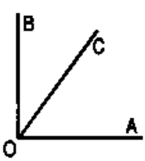


Рис 1.69

№ 49, 51, 53, дополнительные задачи (см. ниже).

1. Угол AOB принадлежит внутренней области угла COD; $\angle COD = 140°$, $\angle AOB = 100°$. Найдите угол, образованный биссектрисами углов AOC и BOD, луч OB принадлежит внутренней области угла AOD.

Решение (см. рис. 1.68): Пусть OM и ON – биссектрисы углов AOC и BOD соответственно, тогда $\angle COM = \angle AOM$, $\angle DON = \angle BON$. $\angle COD = \angle COA + \angle AOB + \angle BOD$, тогда $\angle COA + \angle BOD = \angle COD - \angle AOB = 140° - 100° = 40°$. Но $\angle COA + \angle BOD = 2\angle AOM + 2\angle BON = 2 \cdot (\angle AOM + \angle BON)$, тогда $\angle AOM + \angle BON = 20°$. $\angle MON = \angle AOM + \angle AOB + \angle BON = 100° + 20° = 120°$. (*Ответ*: 120°.)

2. Прямой угол разделен лучом, исходящим из его вершины на два угла, такие, что половина одного угла равна трети другого. Найдите эти углы.

Решение (см. рис. 1.69): $\angle BON = 90°$. $1/2\ \angle BOC = 1/3\ \angle AOC$, тогда $\angle BOC = 2/3\ \angle AOC$. $\angle BOC + \angle AOC = 2/3\ \angle AOC + \angle AOC = 5/3 \angle AOC$, но $\angle BOC + \angle AOC = \angle OB = 90°$, тогда $5/3\ \angle AOC = 90°$, $\angle AOC = 54°$, $\angle BOC = 36°$. (*Ответ*: 54° и 36°.)

Домашнее задание

1. § 5, вопросы 14-16;
2. Решить задачи. I уровень – №35, 36, 39, 40 из рабочей тетради; II уровень – № 42, 46, 48, 52 из учебника.
3. *Дополнительная задача* (см. рис. 1.70):

Дано: $\angle DRQ = 130°$, $\angle DRF = \angle FRM$, $\angle MRN = \angle NRQ$.

Найти: $\angle FRN$.

Решение: $\angle DRF = \angle FRM$, $\angle MRN = \angle NRQ$, $\angle DRQ = 130°$, тогда $\angle DRQ = \angle DRF + \angle FRM + \angle MRN + \angle NRQ = 2\angle FRM + 2\angle MRN = 2 \cdot (\angle FRM + \angle MRN) = 2\angle FRN = 130°$, отсюда $\angle FRN = 65°$. (*Ответ*: $\angle FRN = 65°$.)

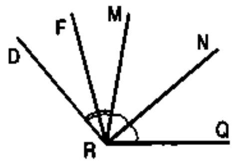


Рис 1 70

Урок 7. Смежные и вертикальные углы

Цели урока:

1) ознакомить учащихся с понятиями смежных и вертикальных углов, рассмотреть их свойства;
2) научить строить угол, смежный с данным углом, изображать вертикальные углы, находить на рисунке вертикальные и смежные углы.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Проверка домашнего задания

1. Проверить ршение дополнительной домашней задачи и задачи № 52.

(Решения данных задач с целью экономии времени можно попросить оформить на доске учащихся, справившихся с решением задачи.)

Задача № 52

OV – биссектриса $\angle ZOY$, тогда $\angle ZOV = \angle YOV$. OU – биссектриса $\angle XOY$, тогда $\angle XOU = \angle YOU$. $\angle ZOX = \angle ZOV + \angle YOV + \angle XOU + \angle YOU = 2\angle YOV + 2\angle YOU = 2 \cdot (\angle YOV + \angle YOU) = 2\angle VOU$. Так как $\angle VOU = 80°$, то $\angle ZOX = 160°$. (*Ответ*: 160°.)

III. Самостоятельная тестовая работа с последующей самопроверкой

Варианты ответов можно попросить написать на небольших листочках и сдать учителю на проверку, а решение в тетрадях учащиеся сами проверят по готовым ответам непосредственно после выполненной самостоятельной работы.

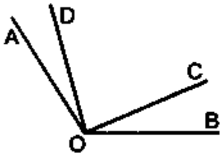


Рис. 1.71

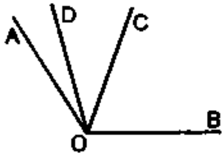


Рис. 1.72

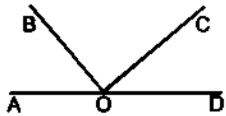


Рис 1.73

I уровень

Вариант I

1. *Дано:* $\angle AOB = 122°$, $\angle AOD = 19°$, $\angle COB = 23°$ (рис. 1.71).
Найти: $\angle COD$.
а) 90°; б) 80°; в) 164°.

2. Луч *OC* проходит между сторонами угла *AOB*, равного 120°. Найдите $\angle AOC$, если $\angle AOC$ меньше $\angle COB$ в 2 раза.
а) 80°; б) 60°; в) 40°.

3. Может ли луч *c* проходить между сторонами $\angle ab$, если $\angle ab = 130°$, $\angle ac = 40°$, $\angle cb = 90°$?
а) да; б) нет;
в) не хватает условий.

Вариант II

1. *Дано:* $\angle AOD = 22°$, $\angle DOC = 47°$, $\angle AOB = 132°$ (рис. 1. 72).
Найти: $\angle COB$.
а) 63°; б) 53°; в) 157°.

2. Луч *OC* проходит между сторонами угла *AOB*, равного 120°. Найдите $\angle COB$, если $\angle AOC$ на 30° больше $\angle COB$.
а) 75°; б) 90°; в) 45°.

3. Может ли луч *c* проходить между сторонами $\angle ab$, если $\angle ab = 50°$, $\angle ac = 120°$, $\angle cb = 70°$?
а) да; б) нет; в) не хватает условий.

II уровень

Вариант I

1. *Дано:* $\angle AOB = 53°$, $\angle BOC = 91°$ (рис. 1.73).
Найти: $\angle COD$.
а) 36°; б) 142°; в) 46°.

2. Между сторонами угла *BOC*, равного 160°, проходит луч *OK*. Найдите $\angle BOK$, если разность углов *BOK* и *KOC* равна 48°.
а) 112°; б) 56°; в) 104°.

3. Какой из лучей *a*, *b* и *c* проходит между двумя другими, если $\angle ab = 122°$, $\angle ac = 34°$, $\angle cb = 78°$?
а) *a*; б) *b*; в) *c*.

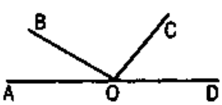


Рис. 1.74

Вариант II

1. *Дано:* $\angle AOB = 34°$, $\angle DOC = 27°$ (рис. 1.74).
Найти: $\angle BOC$.
а) 129°; б) 119°; в) 173°.

2. Между сторонами угла BOC, равного 160°, проходит луч OK. Найдите $\angle KOC$, если $\angle BOK$ меньше $\angle KOC$ на 12°.

а) 86°; б) 74°;в) 148°.

3. Какой из лучей a, b и c проходит между двумя другими, если $\angle ab = 65°$, $\angle ac = 91°$, $\angle cb = 26°$?

а) a; б) b; в) c.

III уровень

Вариант I

1. *Дано:* $\angle AOD = 140°$, $\angle AOC = 94°$, $\angle BOD = 76°$ (рис. 1.75).
Найти: $\angle BOC$.

а) 18°; б) 15°; в) 30°.

2. Между сторонами угла AOB, равного 120°, взята точка C. Найдите $\angle AOC$, если разность углов AOC и COB составляет 1/6 их суммы.

а) 20°; б) 70°; в) 50°.

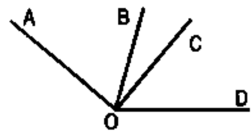


Рис 1 75

3. Какое наибольшее число лучей можно провести из одной точки, чтобы все углы, ограниченные соседними лучами, были тупыми?

а) 3; б) 2; в) 4.

Вариант II

1. *Дано:* $\angle BOC = 30°$, $\angle AOC = 78°$, $\angle BOD = 69°$ (рис. 1.76).
Найти: $\angle AOD$.

а) 107°; б) 117°; в) 87°.

2. Между сторонами угла AOB, равного 120°, взята точка C. Найдите $\angle AOC$, если известно, что разность углов AOC и COB меньше их суммы в 4 раза.

а) 75°; б) 45°; в) 30°.

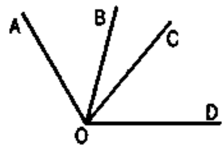


Рис. 1 76

3. Какое наименьшее число лучей можно провести из одной точки, чтобы все углы, ограниченные соседними лучами, были острыми?

а) 6; б) 4; в) 5.

Ответы к тестам:

	I уровень		*II уровень*		*III уровень*	
	I в	*II в*	*I в*	*II в*	*I в*	*II в*
1 задание	б	а	а	б	в	б
2 задание	в	в	в	а	б	а
3 задание	а	б	в	б	в	в

IV. Изучение нового материала

1. Ввести понятие смежных углов.

Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются продолжениями одна другой, называются смежными.

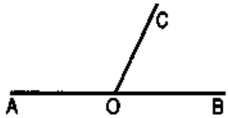


Рис 1 77

См. рис. 1.77: $\angle AOC$ и $\angle COB$ – смежные. Лучи OB и OA образуют одну прямую.

2. Вывести свойство смежных углов в ходе выполнения следующих упражнений:

– Сколько углов изображено на рисунке? Какие это углы? (*3 угла, $\angle AOC$ и $\angle COB$ – смежные, а $\angle AOB$ – развернутый.*)
– Существует ли какая-нибудь взаимосвязь между этими углами? (*Да, $\angle AOC + \angle COB = \angle AOB$.*)
– Как по-другому можно записать данное равенство? Почему? (*$\angle AOC + \angle COB = 180°$, так как $\angle AOB$ – развернутый и его градусная мера равна 180°.*)
– Для всякой ли пары смежных углов выполняется это равенство? (*Да.*)
– Данные равенства – математическая запись свойства смежных углов. Сформулируйте само свойство смежных углов. (*Сумма смежных углов равна 180°.*)

3. Ввести понятие вертикальных углов в ходе выполнения следующих упражнений:

– Начертите неразвернутый угол *MOK*.
– Проведите лучи *OC* и *OD*, являющиеся продолжениями сторон угла *MOK*.
– Сколько неразвернутых углов получилось? (*Четыре – $\angle MOK$, $\angle MOC$, $\angle COD$, $\angle KOD$.*)
– Назовите углы, которые не являются смежными. (*$\angle MOK$ и $\angle COD$, $\angle MOD$ и $\angle KOC$.*)
– Запишите в тетради: $\angle MOK$ и $\angle COD$ – вертикальные; $\angle MOD$ и $\angle KOC$ – вертикальные.
– Попробуйте сформулировать свойство вертикальных углов и доказать его, т.е. найдите взаимосвязь между вертикальными углами.

Учитель предлагает учащимся подумать в течение 3–5 минут, а затем идет обсуждение вариантов ответов.

Свойство вертикальных углов: вертикальные углы равны.

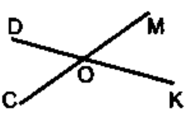


Рис. 1.78

Доказательство (см. рис. 1.78):

$\angle MOK + \angle DOM = 180°$, так как $\angle MOK$ и $\angle DOM$ – смежные и их сумма равна 180°, отсюда $\angle MOK = 180° - \angle DOM$. $\angle COD + \angle DOM = 180°$, так как $\angle COD$ и $\angle DOM$ – смежные и их сумма равна 180°, отсюда $\angle COD = 180° - \angle DOM$. Получили, что $\angle MOK = 180° - \angle DOM$ и $\angle COD = 180° - \angle DOM$, значит $\angle MOK = \angle COD$, а это вертикальные углы. Итак, вертикальные углы равны.

V. Закрепление изученного материала

1. Устно решить задачи №41, 43, 44 из рабочей тетради и №59, 60, 63 из учебника.

Задача № 59. (*Ответ:* прямым.)

Задача № 60. (*Ответ:* да.)

Задача № 63. (*Ответ:* да.)

2. Всем классом решить письменно задачи № 62, 65(а).

(Один из учащихся решает задачу у доски, остальные – в тетрадях.)

Задача № 62

Дано: $\angle BOD = \angle COD$, $\angle COB = 148°$.

Найти: $\angle AOD$.

Решение: так как $\angle BOD = \angle COD$, $\angle COB = \angle COD + \angle DOB = 148°$, то $\angle COB = 148° : 2 = 74°$.

$\angle AOC$ и $\angle COB$ – смежные, значит, $\angle AOC = 180° - \angle COB = 180° - 148° = 32°$. $\angle AOD = \angle AOC + \angle COD = 32° + 74° = 106°$. (*Ответ*: $\angle AOD = 106°$.)

Наводящие вопросы к задаче № 62.

1) Представьте угол AOD в виде суммы двух углов.
2) Можно ли вычислить градусную меру угла COD? Как?
3) Что вы можете сказать об углах AOC и COB?
4) Чему равна градусная мера угла AOC? А угла AOD?

Задача № 65(а)

Дано: $AB \cap CD = 0$.

Сумма двух углов равна 114°.

Найти: $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$.

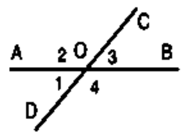


Рис. к задаче 65а

Решение: Сумма двух смежных углов равна 180°, значит, данные углы не являются смежными, так как их сумма равна 114°, поэтому эти углы вертикальные.

Вертикальные углы равны, следовательно $\angle 1 = \angle 3 = 114° : 2 = 57°$.

$\angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 4 = 180°$, так как $\angle 1$ и $\angle 2$ – смежные и $\angle 3$ и $\angle 4$ – смежные, значит $\angle 2 = \angle 4 = 180° - 57° = 123°$. (*Ответ*: 57°, 123°, 57°, 123°.)

Наводящие вопросы к задаче № 65 (а).

1) Сумма каких двух из образовавшихся углов может быть равна 114°? Почему?
2) Чему равен каждый из этих углов?
3) Как найти градусные меры двух оставшихся углов? Объясните.

3. Самостоятельное решение задач:

I уровень

№ 58, 61(а, в, г), 64(а).

II уровень

№ 61(в, г), 64(а), дополнительную задачу.

Дополнительная задача:

Найдите угол, образованный:

а) биссектрисами двух смежных углов;

б) биссектрисами двух вертикальных углов.

а) *Дано*: $\angle AOC$ и $\angle COB$ – смежные, OM – биссектриса $\angle AOC$, ON – биссектриса $\angle COB$ (рис. 1.79 а).

Найти: $\angle MON$.

Решение: OM – биссектриса $\angle AOC$, значит $\angle AOM = \angle COM$. ON – биссектриса $\angle COB$, значит $\angle CON = \angle NOB$. $\angle AOC$ и $\angle COB$ – смежные, поэтому $\angle AOC + \angle COB = 180°$, $\angle AOC = 2\angle COM$, $\angle COB =$

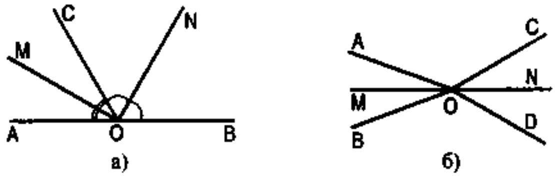


Рис. 1.79

$= 2\angle CON$, значит $2\angle COM + 2\angle CON = 2\cdot(\angle COM + \angle CON) = 2\angle MON = 180°$, поэтому $\angle MON = 90°$. (*Ответ*: $\angle MON = 90°$.)

б) *Дано*: $\angle AOB$ и $\angle COD$ – вертикальные, OM – биссектриса $\angle AOB$, ON – биссектриса $\angle COD$ (рис. 1.79 б).

Найти: $\angle MON$.

Решение: так как OM – биссектриса $\angle AOB$, то $\angle AOM = \angle BOM$, а $\angle AOM = 1/2\ \angle AOB$. Так как ON – биссектриса $\angle COD$, то $\angle CON = \angle DON$, а $\angle CON = 1/2\ \angle COD$. Но $\angle AOB$ и $\angle COD$ – вертикальные, значит $\angle AOB = \angle COD$, следовательно, $1/2\ \angle AOB = 1/2\ \angle COD$, то есть $\angle AOM = \angle BOM = \angle CON = \angle DON$. $\angle MON = \angle AOM + \angle AOC + \angle CON$. Заменим $\angle CON$ на $\angle BOM$, так как $\angle CON = \angle BOM$, поэтому $\angle MON = \angle AOM + \angle AOC + \angle BOM = \angle AOC + (\angle AOM + \angle BOM) = \angle AOC + \angle AOB = 180°$, так как $\angle AOC$ и $\angle AOB$ – смежные. (*Ответ*: $\angle MON = 180°$.)

В ходе самостоятельного решения задач учитель контролирует работу менее подготовленных учащихся и оказывает индивидуальную помощь остальным по мере необходимости.

Задача № 58

а) $180° - 111° = 69°$;

б) $180° - 90° = 90°$;

в) $180° - 15° = 165°$.

Задача № 61

а) $\angle kl = \angle hk + 40°$ по условию задачи.

$\angle kl + \angle hk = 180°$, так как $\angle kl$ и $\angle hk$ – смежные, поэтому $\angle kl + \angle hk = (\angle hk + 40°) + \angle hk = 2\cdot\angle hk + 40° = 180°$, откуда $\angle hk = 70°$, значит, $\angle kl = 70 + 40° = 110°$.

в)По условию задачи $\angle hk = \angle kl + 47°18'$.

$\angle hk$ и $\angle kl$ – смежные, значит $\angle hk + \angle kl = 180°$, тогда $\angle hk + \angle kl = (\angle kl + 47°18') + \angle kl = 2\cdot\angle kl + 47°18' = 180°$, откуда $\angle kl = (180° - 47°18') : 2 = 66°21'$, $\angle hk = 66°21' + 47°18' = 113°39'$.

г) По условию задачи $\angle hk = 3\cdot\angle kl$.

$\angle hk$ и $\angle kl$ – смежные, поэтому $\angle hk + \angle kl = 180°$, тогда $\angle hk + \angle kl = 3\cdot\angle kl + \angle kl = 180°$, $4\cdot\angle kl = 180°$, $\angle kl = 45°$, $\angle hk = 135°$.

(*Ответ*: а) $\angle hk = 70°$, $\angle kl = 110°$; в) $\angle kl = 66°21'$, $\angle hk = 113°39'$; г) $\angle kl = 45°$, $\angle hk = 135°$.)

Задача № 64 (а)

$\angle 2$ и $\angle 4$ – вертикальные, значит $\angle 4 = \angle 2 = 117°$.

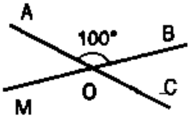


Рис. к задаче 42

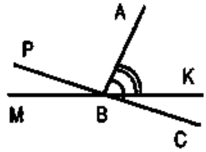


Рис. к задаче 45

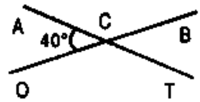


Рис. к задаче 46

$\angle 1$ и $\angle 2$ – смежные, поэтому $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, $\angle 1 = 180° - 117° = 63°$.

$\angle 1$ и $\angle 3$ – вертикальные, $\angle 1 = \angle 3 = 63°$. (*Ответ*: $\angle 1 = \angle 3 = 63°$, $\angle 4 = 117°$.)

Домашнее задание

1. § 11, вопросы 17, 18.
2. Решить задачи. I уровень – №42, 45, 46 из рабочей тетради; II уровень – №61 (б, д), 64 (б), 65 (б) из учебника.

Задача № 42

а) Проведите луч *OC* так, чтобы углы *AOB* и *COB* были смежными, а луч *OM* – так, чтобы углы *AOB* и *MOB* были смежными.

б) Вычислите градусные меры углов *COB* и *MOA*, если $\angle AOB = 100°$. (*Ответ*: б) $\angle COB = 80°$, $\angle MOA = 80°$.)

Задача № 45

На рисунке $\angle ABC = 83°$, $\angle ABK = 65°$. Найдите $\angle PBM$.

Решение: $\angle PBM = \angle CBK$, так как эти углы вертикальные; $\angle CBK = ABC - \angle ABK = 83° - 65° = 18°$. Следовательно, $\angle PBM = 18°$. (*Ответ*: $\angle PBM = 18°$.)

Задача № 46

Прямые *AB* и *OT* пересекаются в точке *C*, $\angle AOC = 40°$. Сделайте чертеж. Найдите $\angle BCT$, $\angle ACT$, $\angle BCO$.

Решение:

1) $\angle BCT = \angle ACO$, так как эти углы вертикальные, поэтому $\angle BCT = 40°$;
2) $\angle ACT + \angle ACO = 180°$, так как эти углы смежные, поэтому $\angle ACT = 180° - \angle ACO = 180° - 40° = 140°$;
3) $\angle BCO = \angle ACT$, так как эти углы вертикальные, следовательно, $\angle$ BCO = 140°. (*Ответ*: $\angle BCO = 40°$, $\angle ACT = 140°$, $\angle BCO = 140°$.)

3. *Дополнительна задача:*

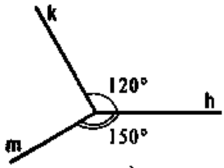
Известно, что $\angle hk = 120°$, $\angle hm = 150°$.

Найдите: а) $\angle km$; б) угол между биссектрисами $\angle hk$ и $\angle hm$.

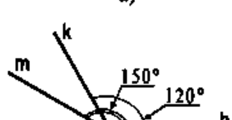
Решение (см. рис. 1.80):

а) Возможны два случая:

$\angle km = 360° - (120° + 150°) = 90°$.



а)



б)

Рис. 1.80

$\angle km = 150° - 120° = 30°$.

(*Ответ*: 90° или 30°.)

б) В первом случае $1/2\ \angle hk = 60°$, $1/2\ \angle hm = 75°$, тогда угол между биссектрисами $\angle hk$ и $\angle hm$ равен $60° + 75° = 135°$. Во втором случае: $75° - 60° = 15°$.

(*Ответ*: 135° или 15°.)

Урок 8. Перпендикулярные прямые

Цели урока:

1) повторить понятие перпендикулярные прямые;
2) рассмотреть свойство перпендикулярных прямых;
3) совершенствовать у учащихся умение решать задачи.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Повторение. Проверка домашнего задания

1. Проверить дополнительную домашнюю задачу и задачу № 65(б).(Решения задач попросить оформить на доске двух учеников во время решения задач по готовым чертежам и заслушать всем классом перед изучением материала.)

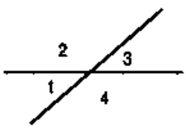


Рис к задаче 65б

Задача № 65 (б)

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 220°$.

$\angle 4 = 360° - 220° = 140°$.

$\angle 2 = \angle 4 = 140°$ (вертикальные).

$\angle 1 = \angle 3 = 180° - 140° = 40°$ ($\angle 1$ и $\angle 2$, $\angle 3$ и $\angle 4$ – смежные).

(*Ответ*: 40°, 140°, 40°, 140°.)

2. Решение задач по готовым чертежам.

I уровень

(устно, фронтальная работа с учащимися)

1. Рис. 1.81.

Найти: $\angle CBD$.

2. Рис. 1.82.

Найти: $\angle FBD$, $\angle ABF$, $\angle CBD$.

3. Рис. 1.83.

Дано: $\angle ADB$ в 5 раз меньше $\angle BDC$.

Найти: $\angle ADB$, $\angle BDC$.

4. Рис. 1.84.

Дано: $\angle NMO : \angle LMN = 1 : 3$.

Найти: $\angle NMO$, $\angle LMN$, $\angle RMO$, $\angle LMR$.

II уровень

(самостоятельно с последующей проверкой по собранным в конце урока тетрадям)

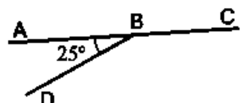


Рис 1 81

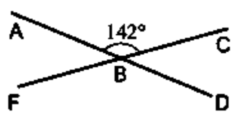


Рис. 1.82

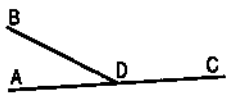


Рис 1 83

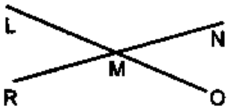


Рис. 1.84

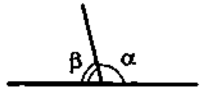


Рис. 1 85

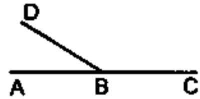


Рис. 1.86

1. Рис. 1.85.
Дано: $\alpha - \beta = 30°$.
Найти: α, β.
(*Ответ*: $\alpha = 105°$, $\beta = 75°$.)
2. Рис. 1.86.
Дано:. $\angle ABD : \angle CBD = 1 : 5$.
Найти: $\angle ABD$, $\angle CBD$.
(*Ответ*: $\angle ABD = 30°$, $\angle CBD = 150°$.)
3. Рис. 1.87.

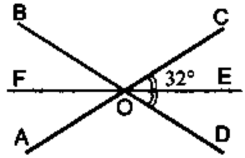


Рис. 1.87

Дано: OE – биссектриса $\angle COD$, $\angle DOE = 32°$.
Найти: $\angle BOC$, $\angle AOF$.
(*Ответ*: $\angle BOC = 180° - \angle COD = 116°$, $\angle AOF = \angle COE = 32°$.)
4. Рис. 1.88.

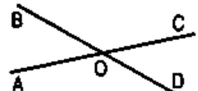


Рис 1.88

Дано: $\angle AOB = 1/8\ (\angle BOC + \angle COD + + \angle DOA)$.
Найти: $\angle AOB$, $\angle BOC$.
(*Ответ*: $\angle AOB = 1/8\ (360° - \angle AOB)$, $\angle AOB = 40°$, $\angle BOC = 140°$.)

III. Изучение нового материала

При изучении нового материала желательно опираться на имеющиеся у учащихся знания по данной теме за курс математики 6 класса. Можно предложить учащимся следующие упражнения:

– Какие прямые называются перпендикулярными? (*Две прямые называются перпендикулярными, если при пересечении они образуют четыре прямых угла.*)
– Запишите, используя математические символы, «прямая *AB* перпендикулярна прямой *CD*». Выполните соответствующий рисунок и укажите все углы. ($AB \perp CD$. $\angle AOC = \angle COB = \angle BOD = = \angle AOD = 90°$. *Рис. 1.89.*)
– Пересекаются ли две прямые, перпендикулярные третьей? (*Нет.*)

(Учащиеся могут вспомнить, что такие прямые параллельны.)

Две прямые, перпендикулярные третьей, не пересекаются – это свойство перпендикулярных прямых.

Докажем это свойство (пункт 12 учебника). Это свойство лучше доказать самому учителю.

Пункт 13 «Построение прямых углов на местности» можно порекомендовать прочитать дома.

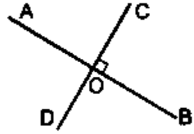


Рис 1.89

IV. Закрепление изученного материала

1. Выполнить практическое задание № 57.

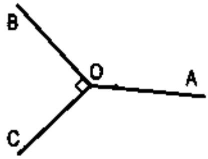


Рис. 1.90

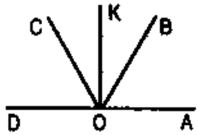


Рис. 1.91

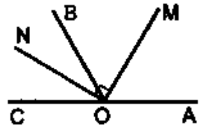


Рис. 1.92

2. Решить задачу № 69 (один ученик работает у доски, остальные –в тетрадях).

3. При наличии времени можно решить следующие задачи:

Задача 1

Два тупых угла имеют общую сторону, а две другие стороны взаимно перпендикулярны. Найдите величину тупого угла, если известно, что тупые углы равны.

Указание (см. рис. 1.90): $\angle AOB = \angle AOC$. $BO \perp OC$, значит $\angle BOC = 90°$. $2\angle AOB = 360° - 90° = 270°$, $\angle AOB = 135°$.

Задача 2

Из вершины развернутого угла проведены два луча, которые делят его на три равные части. Докажем, что биссектриса среднего угла перпендикулярна сторонам развернутого угла.

Решение (см. рис. 1.91): $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = 60°$. OK – биссектриса $\angle BOC$, тогда $\angle COK = \angle BOK = 30°$, следовательно, $\angle DOK = 60° + 30° = 90°$, $\angle AOK = 60° + 30° = 90°$, т.е. $OK \perp OA$, $OK \perp OD$.

Задача 3

Углы AOB и BOC смежные, OM – биссектриса $\angle AOB$, луч ON принадлежит внутренней области угла BOC и перпендикулярен OM. Является ли ON биссектрисой угла BOC? Почему?

Решение (см. рис. 1.92): $\angle AOB$ и $\angle BOC$ смежные, значит $\angle AOB = 180° - \angle BOC$, а так как OM – биссектриса $\angle AOB$, то $\angle BOM = \angle MOA = 1/2\,(180° - \angle BOC) = 90° - 1/2\,\angle BOC$. Так как $ON \perp OM$, то $\angle MON = 90°$, а $\angle BOM = 90° - \angle BON$. Получили, что $\angle BOM = 90° - 1/2\,\angle BOC = 90° - \angle BON$, откуда следует $1/2\,\angle BOC = \angle BON$, т.е. ON является биссектрисой $\angle BOC$.

V. Самостоятельная работа

I уровень

Вариант I

1. Смежные углы относятся как 1 : 2. Найдите эти смежные углы.

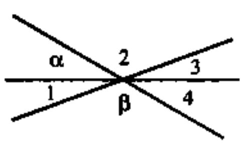


Рис. 1.93

2. Один из углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, равен 21°. Найдите остальные углы.

3. *Дано:* $\alpha = 30°$, $\beta = 140°$ (рис. 1.93).

Найти: $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$.

Вариант II

1. Один из смежных углов больше другого на 20°. Найдите эти смежные углы.

2. Один из углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, равен 102°. Найдите остальные углы.

3. *Дано:* $\alpha = 20°$, $\beta = 130°$ (рис. 1.94).
Найти: $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$.

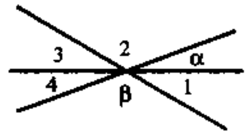


Рис. 1.94

II уровень

Вариант I

1. Один из смежных углов составляет 0,2 другого. Найдите эти смежные углы.

2. Сумма трех углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, равна 325°. Найдите остальные углы.

3. Даны углы α, β и γ. Известно, что $\alpha > \beta$, $\gamma < \beta$. Найдите среди этих углов тот, смежный с которым будет наибольшим.

Вариант II

1. Один из смежных углов составляет 0,8 другого. Найдите эти смежные углы.

2. Сумма двух углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, равна 78°. Найдите остальные углы.

3. Даны углы α, β и γ. Известно, что $\alpha > \beta$, а $\gamma < \beta$. Найдите среди углов тот, смежный с которым будет наименьшим.

III уровень

Вариант I

1. 4/7 одного из смежных углов и 1/4 другого составляют в сумме прямой угол. Найдите эти смежные углы.

2. Сумма вертикальных углов в 2 раза меньше угла, смежного с каждым из них. Найдите эти вертикальные углы.

3. Один из четырех углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, в 11 раз меньше суммы трех остальных углов. Найдите эти четыре угла.

Вариант II

1. Меньший из смежных углов в 4 раза меньше разности этих смежных углов. Найдите эти смежные углы.

2. Сумма вертикальных углов на 30° меньше угла, смежного с каждым из них. Найдите эти вертикальные углы.

3. Сумма трех углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, на 280° больше четвертого угла. Найдите эти четыре угла.

Тетради с выполненными работами в конце урока учителю необходимо собрать для проверки.

Домашнее задание

1. § 12, 13, вопросы 19–21.
2. Решить задачи. I уровень – №66, 68 из учебника, №48, 49 из рабочей тетради; II уровень – №66, 68, 70 из учебника и дополнительную задачу.

Задача № 48

Прямые *KM* и *BC* пересекаются в точке *O*, $\angle COM = 89°$. Перпендикулярны ли прямые *KM* и *BC*? Объясните ответ.

Решение: Две пересекающиеся прямые называются перпендикулярными, если они образуют <u>четыре прямых угла</u>. По условию задачи $\angle COM = 89°$, т.е. он не <u>прямой</u>, поэтому прямые KM и BC <u>не перпендикулярные</u>. (*Ответ*: <u>нет</u>.)

Задача № 49

Прямая b пересекает стороны угла C в точках A и B. Могут ли обе прямые CA и CB быть перпендикулярными к прямой b?

Решение: Предположим, что $CA \perp b$ и $CB \perp b$, тогда две прямые, перпендикулярные к прямой b, <u>пересекаются</u> в точке C, что невозможно. Следовательно, обе прямые CA и CB быть перпендикулярными к прямой b <u>не могут</u>. (*Ответ*: <u>нет</u>.)

3. *Дополнительная задача:*

Докажите, что сумма каждых трех углов, не прилежащих один к другому и образуемых тремя прямыми, проходящими через одну точку, равна двум прямым углам.

Доказательство (см. рис. 1.95): $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ – три угла, не прилежащих один к другому, и образованы тремя прямыми, проходящими через одну точку. $\angle 1$ и $\angle 4$ – вертикальные, $\angle 1 = \angle 4$. $\angle 2$ и $\angle 5$ – вертикальные, $\angle 2 = \angle 5$. $\angle 3$ и $\angle 6$ – вертикальные, $\angle 3 = \angle 6$. $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 1 + \angle 6 + \angle 2 = 180°$. Два прямых угла в сумме так же составляют 180°, следовательно, сумма $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$ равна двум прямым углам, что и требовалось доказать.

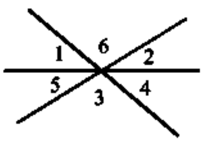


Рис. 1.95

Урок 9. Решение задач. Подготовка к контрольной работе

Цели урока:

1) повторение, закрепление материала главы I;
2) совершенствование навыков решения задач;
3) подготовить учащихся к предстоящей контрольной работе.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Проверка домашнего задания

Проверяются решения домашних задач №66, 68.

(Решение задач предложить подготовить на доске заранее учащимся, справившимся с заданием.)

Задача № 66

а) $\angle 2$ и $\angle 4$ – вертикальные, значит $\angle 2 = \angle 4$.

Так как $\angle 2 + \angle 4 = 220°$, то $\angle 2 = 110°$ и $\angle 4 = 110°$, тогда $\angle 1 = 70°$, $\angle 3 = 70°$ ($\angle 1$ и $\angle 2$, $\angle 3$ и $\angle 4$ – смежные, $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, $\angle 3 + \angle 4 = 180°$). (*Ответ*: $\angle 2 = \angle 4 = 110°$, $\angle 1 = \angle 3 = 70°$.)

б) $3 \cdot (\angle 1 + \angle 3) = \angle 2 + \angle 4$.

$\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$ как вертикальные.

$\angle 1 + \angle 2 = 180°$, так как $\angle 1$ и $\angle 2$ – смежные, следовательно, $\angle 2 = 180° - \angle 1$, тогда $3 \cdot (\angle 1 + \angle 1) = (180° - \angle 1) + (180° - \angle 1)$. $6\angle 1 = 360° - 2\angle 1$, $\angle 1 = 45°$, $\angle 2 = 135°$, $\angle 3 = 45°$, $\angle 4 = 135°$. (*Ответ*: $\angle 1 = \angle 3 = 45°$, $\angle 2 = \angle 4 = 135°$.)

в) $\angle 2 - \angle 1 = 30°$, тогда $\angle 2 = \angle 1 + 30°$.

Так как $\angle 1 + \angle 2$ – смежные, то $\angle 1 + \angle 2 = \angle 1 + \angle 1 + 30° = 180°$, получаем $\angle 1 = 75°$, $\angle 2 = 105°$, а значит $\angle 3 = 75°$, $\angle 4 = 105°$. (*Ответ*: $\angle 1 = \angle 3 = 75°$, $\angle 2 = \angle 4 = 105°$.)

Задача № 68

$\angle AOB$ и $\angle DOE$ – вертикальные, значит $\angle DOE = \angle AOB = 50°$. $\angle FOE$ и $\angle BOC$ – вертикальные, значит, $\angle BOC = \angle FOE = 70°$. $\angle AOB + \angle BOC + \angle COD = 180°$, следовательно, $\angle COD = 180° - (\angle AOB + \angle BOC) = 60°$.

$\angle COD$ и $\angle AOF$ – вертикальные, значит, $\angle AOF = \angle COD = 60°$. Тогда $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC = 50° + 70° = 120°$.

$\angle BOD = \angle BOC + \angle COD = 70° + 60° = 130°$, $\angle COE = \angle COD + \angle DOE = 60° + 50° = 110°$. (*Ответ*: $\angle AOC = 120°$, $\angle BOD = 130°$, $\angle COE = 110°$, $\angle COD = 60°$.)

III. Анализ самостоятельной работы

1. Общий анализ самостоятельной работы, проведенной на прошлом уроке;
2. Работа над ошибками по готовым решениям.

(Решения задач раздаются каждому ученику.)

Решения задач самостоятельной работы:

I уровень

Вариант I

1. См. рис. 1.96.

Так как $\angle 1 : \angle 2 = 1 : 2$, то $\angle 1 = x$, $\angle 2 = 2x$. Но $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, тогда $x + 2x = 180°$, $x = 60$, значит $\angle 1 = 60°$, $\angle 2 = 120°$.

2. См. рис. 1.97.

Пусть $\angle 1 = 21°$, тогда $\angle 3 = \angle 1$ как вертикальные и $\angle 3 = 21°$. $\angle 1$ и $\angle 2$ – смежные и $\angle 1 + \angle 2 = 180°$.

Тогда $\angle 2 = 180° - \angle 1 = 159°$. Но $\angle 2 = \angle 4$ как вертикальные и $\angle 4 = 159°$. (*Ответ*: $\angle 1 = \angle 3 = 21°$, $\angle 2 = \angle 4 = 159°$.)

3. $\alpha = 30°$, тогда $\angle 4 = 30°$, так как $\angle 4$ и угол с градусной мерой α – вертикальные.

$\beta = 140°$, тогда $\angle 2 = 140°$, так как $\angle 2$ и угол с градусной мерой β – вертикальные.

$\angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180°$, тогда $\angle 3 = 180° - (\angle 2 + \angle 4) = 10°$.

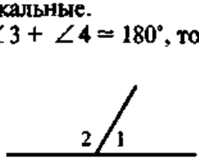


Рис. 1.96

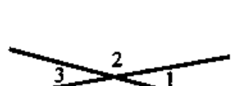


Рис. 1.97

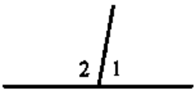


Рис. 1.98

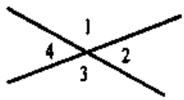


Рис. 1.99

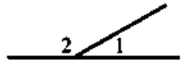


Рис. 1.100

$\angle 3$ и $\angle 1$ – вертикальные, поэтому $\angle 3 = \angle 1$, $\angle 1 = 10°$. (*Ответ*: $\angle 3 = \angle 1 = 10°$, $\angle 2 = 140°$, $\angle 4 = 30°$.)

Вариант II

1. См. рис. 1.98.

$\angle 2$ на 20° больше $\angle 1$, тогда $\angle 1 = x$, $\angle 2 = x + 20°$.

Но $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, тогда $x + x + 20 = 180$, $x = 80°$, значит $\angle 1 = 80°$, $\angle 2 = 100°$.

2. См. рис. 1.99.

Пусть $\angle 1 = 102°$, тогда $\angle 3 = \angle 1$ как вертикальные и $\angle 3 = 102°$.

$\angle 1$ и $\angle 2$ – смежные и $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, тогда $\angle 2 = 180° - \angle 1 = 78°$. Но $\angle 2 = \angle 4$ как вертикальные и $\angle 4 = 78°$. (*Ответ*: $\angle 1 = \angle 3 = 102°$, $\angle 2 = \angle 4 = 78°$.)

3. $\alpha = 20°$, тогда $\angle 4 = 20°$, так как $\angle 4$ и угол с градусной мерой α – вертикальные.

$\beta = 130°$, тогда $\angle 2 = 130°$, так как $\angle 2$ и угол с градусной мерой β – вертикальные.

$\angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180°$, тогда $\angle 3 = 180° - (\angle 2 + \angle 4) = 30°$.

$\angle 3$ и $\angle 1$ – вертикальные, поэтому $\angle 3 = \angle 1$, $\angle 1 = 30°$. (*Ответ*: $\angle 3 = \angle 1 = 30°$, $\angle 2 = 130°$, $\angle 4 = 20°$.)

II уровень

Вариант I

1. См. рис. 1.100.

Пусть $\angle 1$ составляет 0,2 $\angle 2$, тогда $\angle 1 = 0{,}2 \cdot \angle 2$. Но $\angle 1$ и $\angle 2$ – смежные и $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, тогда $0{,}2 \cdot \angle 2 + \angle 2 = 180°$, $\angle 2 = 150°$, а $\angle 1 = 0{,}2 \cdot 150° = 30°$. (*Ответ*: 30° и 150°.)

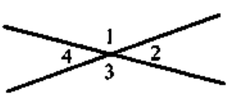


Рис. 1.101

2. См. рис. 1.101.

Пусть $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 325°$, тогда $\angle 4 = 360° - 325° = 35°$, $\angle 4 = \angle 2$ как вертикальные, тогда $\angle 2 = 35°$.

$\angle 1 + \angle 2 = 180°$, $\angle 4 + \angle 3 = 180°$, тогда $\angle 1 = \angle 3 = 145°$. (*Ответ*: 145°, 35°, 145°.)

3. Так как $\alpha > \beta$, $\gamma < \beta$, то $\gamma < \beta < \alpha$, т.е. наименьшим среди углов α, β, γ будет γ, а смежный с ним угол будет наибольшим среди углов, смежных с углами α, β, γ.

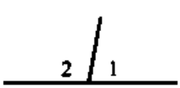


Рис 1 102

Вариант II

1. См. рис. 1.102.

Пусть $\angle 1$ составляет 0,8 $\angle 2$, тогда $\angle 1 = 0{,}8 \cdot \angle 2$. Но $\angle 1$ и $\angle 2$ – смежные и $\angle 1 +$

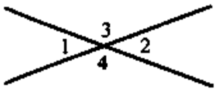


Рис. 1.103

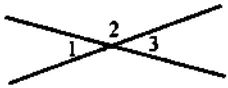


Рис. 1.104

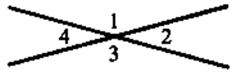


Рис. 1.105

$+ \angle 2 = 180°$, тогда $0{,}8 \cdot \angle 2 + \angle 2 = 180°$, $\angle 2 = 100°$, а $\angle 1 = 0{,}8 \cdot 100° = 80°$. (*Ответ*: 80° и 100°.)

2. См. рис. 1.103.

Сумма смежных углов равна 180°, поэтому 78° – это сумма вертикальных углов. Но вертикальные углы равны и получаем, что $\angle 1 = \angle 2 = 39°$. (*Ответ*: 39°, 39°.)

3. Так как $\alpha > \beta$, $\gamma < \beta$, то $\gamma < \beta < \alpha$, т.е. наименьшим среди углов α, β, γ будет γ, а наименьшим среди смежных с ними углов будет угол, смежный с углом α.

III уровень

Вариант I

1. Пусть $\angle 1$ и $\angle 2$ – смежные и $4/7\ \angle 1 + 1/4\ \angle 2 = 90°$.

Так как $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, то $\angle 2 = 180° - \angle 1$, тогда $4/7\ \angle 1 + 1/4\,(180° - \angle 1) = 90°$, $\angle 1 = 140°$, $\angle 2 = 40°$. (*Ответ*: 140° и 40°.)

2. См. рис. 1.104.

Пусть $\angle 1$ и $\angle 3$ – вертикальные, $\angle 2$ – смежный с каждым из углов 1 и 3, тогда $2 \cdot (\angle 1 + \angle 3) = \angle 2$.

Но $\angle 1 = \angle 3$, а $\angle 2 = 180° - \angle 1$, тогда $2 \cdot (\angle 1 + \angle 1) = 180° - \angle 1$, $\angle 1 = 36°$. (*Ответ*: $\angle 1 = \angle 3 = 36°$.)

3. См. рис. 1.105.

Пусть данные углы – $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$.

Тогда $\angle 4 \cdot 11 = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3$. $\angle 1 = \angle 3$ как вертикальные, $\angle 2 = \angle 4 = 180° - \angle 1$.

Тогда $11 \cdot (180° - \angle 1) = \angle 1 + (180° - \angle 1) + \angle 1$, $\angle 1 = 150°$, $\angle 2 = 30°$, $\angle 3 = 150°$, $\angle 4 = 30°$. (*Ответ*: 30°, 30°, 150°, 150°.)

Вариант II

1. Пусть $\angle 1$ и $\angle 2$ – смежные и $4\angle 1 = \angle 2 - \angle 1$.

Так как $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, то $\angle 2 = 180° - \angle 1$, тогда $4\angle 1 = 180° - \angle 1 - \angle 1$, $\angle 1 = 30°$, $\angle 2 = 150°$. (*Ответ*: 30° и 150°.)

2. См. рис. 1.106.

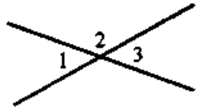


Рис. 1.106

Пусть $\angle 1$ и $\angle 3$ – вертикальные $\angle 2$ – смежный с каждым из углов 1 и 3.

Тогда $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = 180° - \angle 1$, и $\angle 1 + \angle 3 + 30° = \angle 2$, т.е. $\angle 1 + \angle 1 + 30° = 180° - \angle 1$, $\angle 1 = 50°$. (*Ответ*: $\angle 1 = \angle 3 = 50°$.)

3. См. рис. 1.107.

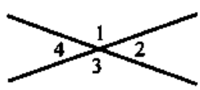


Рис. 1.107

Пусть данные углы – $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$, тогда $\angle 4 + 280° = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3$.

$\angle 1 = \angle 3$ как вертикальные, $\angle 2 = \angle 4 = 180° - \angle 1$.

Тогда $180^\circ - \angle 1 + 280^\circ = \angle 1 + (180^\circ - \angle 1) + \angle 1$, $\angle 1 = 140^\circ$, $\angle 3 = 140^\circ$, $\angle 2 = \angle 4 = 40^\circ$. (*Ответ*: 40°, 40°, 140°, 140°.)

IV. Проверочный тест

Проводится тест с последующей самопроверкой с целью повторения теоретического материала.

(Ответы теста учащиеся записывают в тетрадях. Учителю во избежание списывания желательно предупредить учащихся, что оценки за данный тест выставляться не будут, учащиеся сами оценят уровень своих знаний и основная цель данного теста — повторение теории и устранение пробелов в их знаниях.)

1. Точка C лежит на луче AB. Какая из точек A, B, C лежит между двумя другими?

а) A; б) B или C;
в) C; г) B.

2. Отрезок XM пересекает прямую a. Отрезок XD пересекает прямую a. Пересекает ли прямую a отрезок MD?

а) да; б) может не пересекать;
в) никогда не пересекает; г) нет правильного ответа.

3. Один из углов, образованных при пересечении двух прямых — прямой. Остальные углы ...

а) острые и прямой; б) тупые и прямой;
в) прямые; г) нет правильного ответа.

4. Сумма двух углов, образованных при пересечении двух прямых, равна 180°. Эти углы:

а) смежные; б) вертикальные;
в) нет правильного ответа;
г) могут быть смежными, могут быть вертикальными.

5. Если точка B принадлежит отрезку AC, то ...

а) $AB + BC = AC$; б) $AB + AC = BC$;
в) $BC + AC = AB$; г) нет правильного ответа.

6. Если луч OC проходит между сторонами угла AOB, то ...

а) $\angle AOC = \angle BOC$; б) $\angle AOC + \angle BOC = \angle AOB$;
в) $\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC$; г) $\angle AOC + \angle AOB = \angle BOC$.

7. Если точка B — середина отрезка AC, то ...

а) $AB + BC = AC$; б) $AC = BC$;
в) $AB = 2AC$; г) $AC = 2AB$.

8. Если луч OC — биссектриса $\angle AOB$, то

а) $\angle AOB = \angle AOC + \angle BOC$; б) $\angle AOC = \angle AOB$;
в) $\angle AOC = \angle BOC$; г) $\angle AOB \neq \angle BOC$.

Ответы к тесту:

1 б); 2 а); 3 в); 4 г); 5 а); 6 б); 7 г); 8 в).

V. Решение задач

I уровень

Решение задач на готовых чертежах устно:

1. Рис. 1.108.

Дано: $\angle BOC = \angle AOC + 90^\circ$.

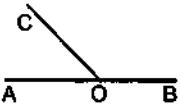


Рис. 1.108

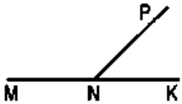


Рис. 1.109

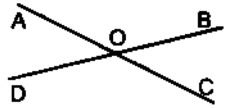


Рис. 1.110

Найти: $\angle AOC$, $\angle BOC$.

2. Рис. 1.109.

Дано: $\angle MNP$ в 3 раза больше $\angle KNP$.

Найти: $\angle MNP$, $\angle KNP$.

3. Рис. 1.110.

Дано: $\angle AOD + \angle DOC + \angle COB = 220°$.

Найти: $\angle AOB$, $\angle AOD$, $\angle BOC$, $\angle DOC$.

4. Рис. 1.111.

Дано: $\angle DBC$ на 80° меньше $\angle ABD$.

Найти: $\angle DBC$, $\angle FBC$.

5. Рис. 1.112.

Дано: $\angle AFP : \angle KFP = 1 : 5$.

Найти: $\angle AFP$, $\angle KFP$.

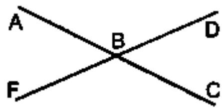


Рис. 1.111

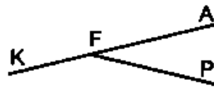


Рис. 1.112

Самостоятельное решение задач с последующей самопроверкой по готовым ответам:

1. Рис. 1.113.

Дано: $\angle BOC$ – прямой, $\angle 2 = 70°$.

Найти: $\angle 1$.

(*Ответ*: $\angle 1 = 20°$.)

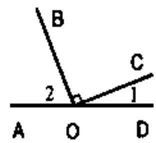


Рис. 1.113

2. На отрезке $\angle H$ отложены точки K и M так, что точка K лежит между точками $\angle$ и M, $HK = 53{,}5$ см, $\angle M = 535$ мм. Сравните отрезки $\angle K$ и HM. (*Ответ*: $PK = HM$.)

3. Развернутый угол AOB разделяет плоскость на две части. Точка E лежит в одной части, точка P – в другой; $\angle EOB = 50°$, $\angle POB = 130°$.

а) Равны ли углы EOB и POA?

б) Являются ли углы EOB и POA вертикальными?

(*Ответ*: а) Да; б) $\angle EOB + \angle POB = \angle POE$. Значит, $\angle POE = 180°$, т.е. угол POE является развернутым и точки P, O, E лежат на одной прямой. Следовательно, $\angle EOB$ и $\angle POA$ – вертикальные.)

II уровень

Самостоятельное решение задач с последующей самопроверкой по готовым ответам:

1. Точка C – середина отрезка AB, точка D – середина отрезка AC, $BD = 15{,}3$ см. Найдите длину отрезка AC и выразите ее в миллиметрах. (*Ответ*: $AC = 10{,}2$ см $= 102$ мм.)

2. Отрезки PE и HM лежат на перпендикулярных прямых и пересекаются в точке K. Внутри угла PKH взята точка A, а внутри угла MKE – точка B, $\angle AKH = 40°$, $\angle MKB = 50°$.

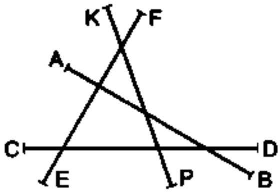


Рис. 1.114

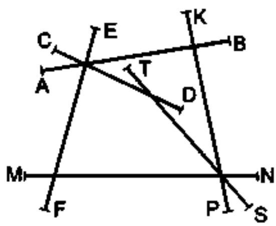


Рис 1.115

а) Найдите углы *PKA* и *BKE*.

б) Лежат ли точки *A*, *K*, *B* на одной прямой? Ответ объясните.

(*Ответ*: а) 50°, 40°; б) Если бы точки *A*, *K*, *B* лежали на одной прямой, то углы *AKH* и *MKB* были бы вертикальны, но эти углы не равны. Значит, точки *A*, *K*, *B* не лежат на одной прямой.)

3. Развернутый угол *AOB* разделяет плоскость на две части. Луч *OM* лежит в одной части, а луч *OK* – в другой. Известно, что углы *MOA* и *KOB* – прямые.

а) Равны ли углы *BOM* и *KOA*?

б) Являются ли прямые *MK* и *AB* взаимно перпендикулярными?

(*Ответ*: а) Да; б) Да.)

4. Можно ли расположить шесть точек на четырех отрезках, не лежащих на одной прямой, так, чтобы каждому отрезку принадлежало по три точки? (*Ответ*: Можно. См. рис. 1.114.)

5. Расположите шесть отрезков так, чтобы каждый из них имел общие точки ровно с тремя другими и число всех этих точек было равно пяти. (*Ответ*: См. рис. 1.115.)

Домашнее задание

1. Решить задачи № 74, 75, 80, 82.

2. *Дополнительная задача:*

Найдите неразвернутые углы, образованные при пересечении двух прямых, если разность двух из них равна 37°.

Урок 10. Контрольная работа №1 «Основные свойства простейших геометрических фигур. Смежные и вертикальные углы» (см. Приложение 1)

Урок 11. Работа над ошибками

Цели урока:

1) устранение пробелов в знаниях учащихся;
2) совершенствование навыков решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Общий анализ контрольной работы

а) общий результат контрольной работы;

б) объяснение заданий, с которыми не справились большинство учащихся;

в) демонстрация лучших работ.

III. Работа над ошибками

I уровень

1. Наметить устно план решения задач контрольной работы, используя заранее подготовленные рисунки.

2. Предложить учащимся самостоятельно решить те задания, с которыми они не справились, и осуществить самопроверку по готовым ответам.

3. Решить задачи контрольной работы II уровня с последующей самопроверкой по готовым ответам и указаниям к задачам.

II уровень

1. Найти свои ошибки по готовым ответам и указаниям к задачам;

2. Решить задачи контрольной работы III уровня с последующей самопроверкой по готовым ответам и указаниям к задачам.

III уровень

1. Найти свои ошибки по готовым ответам и указаниям к задачам;

2. Решить дополнительные задачи с последующей самопроверкой по готовым решениям.

Ответы и указания к задачам контрольной работы:

I уровень

Вариант I

1. *C*. 2. 36° и 144° 3. 60° 4. 16°

Вариант II

1. ***B***. 2. 55° и 125° 3. 60° 4. 13°

II уровень

Вариант I

1. Рассмотрим два случая:

а) Рис. 1.120 а. $AC = 12{,}7$ см.

б) Рис. 1.120 б. $AC = 7{,}9$ см.

2. См. рис. 1.121.

$\angle 2 = \angle 1 + 42^\circ$, $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$, отсюда $\angle 1 + \angle 1 + 42^\circ = 180^\circ$, $\angle 1 = \angle 3 = 69^\circ$, $\angle 2 = \angle 4 = 111^\circ$.

3. См. рис. 1.122.

Так как $\angle KOB = 5\angle AOK$ и $\angle AOK + \angle KOB = 180^\circ$, то $\angle AOK = 30^\circ$, $\angle KOB = 150^\circ$. $\angle KOC = \angle COB = 75^\circ$, тогда $\angle AOC = 105^\circ$. (*Ответ*: $\angle KOC = 75^\circ$, $\angle AOC = 105^\circ$.)

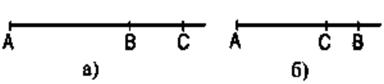


Рис. 1.120

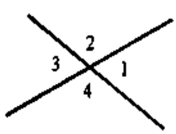


Рис. 1.121

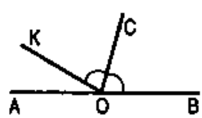


Рис 1.122

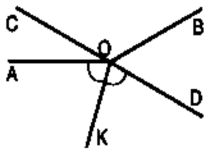


Рис. 1.123

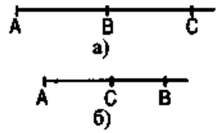


Рис. 1.124

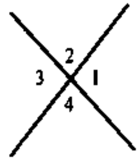


Рис. 1.125

4. См. рис. 1.123.

$\angle COK = 118°$, $\angle COK = \angle COA + \angle AOK$. Так как $\angle AOK = 1/2\ \angle AOD$, а $\angle AOD = 180° - \angle COA$, то $\angle AOK = 1/2 \cdot (180° - \angle COA)$, тогда $\angle COK = \angle COA + 1/2 \cdot (180° - \angle COA) = 118°$. $\angle COA = 56°$, а значит, $\angle BOD = 56°$. (*Ответ*: 56°.)

Вариант II

1. Рассмотрим два случая:

а) Рис. 1.124 а. $AB = 5{,}3$ см.

б) Рис. 1.124 б. $AB = 10{,}3$ см.

2. См. рис. 1.125.

$\angle 1 = \angle 2 + 22°$, $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, отсюда $\angle 2 + \angle 2 + 22° = 180°$, $\angle 2 = \angle 4 = 79°$, $\angle 3 = \angle 1 = 101°$.

3. См. рис. 1.126.

Так как $\angle COB = 4\angle AOC$ и $\angle COB + \angle AOC = 180°$, то $\angle AOC = 36°$, $\angle COB = 144°$. $\angle COD = \angle DOA = 18°$, тогда $\angle BOD = 162°$.

4. См. рис. 1.127.

$\angle CEK = 137°$, $\angle CEK = \angle CEM + \angle MEK$.

Так как $\angle CEM = 1/2\ \angle MEK$, а $\angle MEP = 180° - \angle MEK$, то $\angle CEM = 1/2 \cdot (180° - \angle MEK)$.

Тогда $\angle CEK = 1/2 \cdot (180° - \angle MEK) + \angle MEK = 137°$.

$\angle MEK = 94°$, т. е. $\angle KEM = 94°$. (*Ответ*: $\angle KEM = 94°$.)

III уровень

Вариант I

1. Возможны два случая:

а) Рис. 1.128 а. $BD = 9{,}3$ см.

б) Рис. 1.128 б. $BD = 0{,}9$ см

2. См. рис. 1.129.

$(\angle 2 + \angle 3) \cdot 3 = \angle 2 + \angle 4$. Так как $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4 = 180° - \angle 1$.

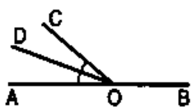


Рис. 1.126

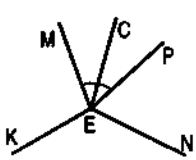


Рис. 1.127

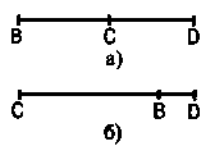


Рис. 1.128

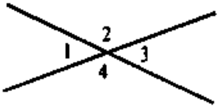


Рис. 1.129

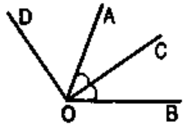


Рис. 1.130

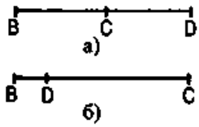


Рис. 1.131

Тогда ($\angle 1 + \angle 1$)·3 = 180° – $\angle 1$ + 180° – $\angle 1$, $\angle 1$ = 45°. (*Ответ*: $\angle 1$ = = $\angle 3$ = $\angle 5$°, $\angle 2$ = $\angle 4$ = 135°.)

3. См. рис. 1.130.

$\angle AOB = \alpha$, OC – биссектриса $\angle AOB$, тогда $\angle AOC = \angle COB = \alpha/2$. $DO \perp OC$, $\angle COD = 90°$, $\angle DOA = 90° - \alpha/2$, $\angle DOB = 90° + \alpha/2$. (*Ответ*: $\angle DOA = 90° - \alpha/2$, $\angle DOB = 90° + \alpha/2$.)

4. $\angle COD - \angle KOD = 61°$, тогда $\angle KOD$ на 61° меньше $\angle COD$, $\angle COD - \angle KOC = 53°$, тогда $\angle KOC$ на 53° меньше $\angle COD$. Пусть $\angle KOD = x$, тогда $\angle KOC = x + 8$, $\angle COD = x + 61$.

$x + x + 8 + x + x + 61 = 360°$, $x = 97°$, $\angle COD = 158°$. (*Ответ*: $\angle COD$ = = 158°.)

Вариант II

1. Возможны два случая:

а) Рис. 1.131 а. BD = 6,3 см.

б) Рис. 1.131 б. BD = 1,1 см.

2. См. рис. 1.132.

($\angle 1 + \angle 3$) · 5 = $\angle 2 + \angle 4$. Так как $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$ = 180° – $\angle 1$, тогда ($\angle 1 + \angle 1$) · 5 = 180° – $\angle 1$ + 180° – $\angle 1$, $\angle 1$ = 30°. (*Ответ*: $\angle 1 = \angle 3$ = 30°, $\angle 2 = \angle 4$ = 150°.)

3. См. рис. 1.133.

$\angle DOA = \beta$, $DO \perp OC$, $\angle COD = 90°$, тогда $\angle AOC = 90° - \beta$. $\angle AOC = \angle COB$, тогда $\angle AOB = 180° - 2\beta$. (*Ответ*: $\angle AOB$ = 180° – – 2β.)

4. $\angle AOB - \angle AOC = 27°$, тогда $\angle AOC$ на 27° меньше $\angle AOB$, $\angle AOB$ – – $\angle BOC = 42°$, тогда $\angle BOC$ на 42° меньше $\angle AOB$.

Пусть $\angle BOC = x$, тогда $\angle AOC = x + 15$, $\angle AOB = x + 42$.

Значит, $x + x + 15 + x + x + 42 = 360$, $x = 101°$, $\angle AOB = 143°$. (*Ответ*: $\angle AOB = 143°$.)

IV. Дополнительные задания

(Предложить учащимся, полностью справившимся с задачами контрольной работы.)

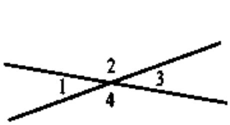


Рис. 1.132

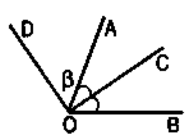


Рис. 1.133

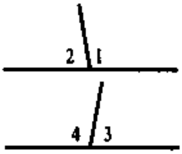


Рис. 1.134

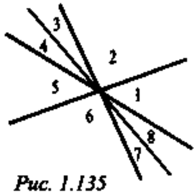


Рис. 1.135

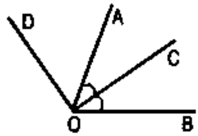


Рис. 1.136

Задача 1

Какой из двух углов больше и на сколько, если известно, что сумма первого угла с углом, который является смежным со вторым, равна 200°?

Решение (см. рис. 1.134): $\angle 1$ и $\angle 2$ смежные, $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. $\angle 3$ и $\angle 4$ смежные. Сравнить $\angle 1$ с $\angle 3$, если $\angle 1 + \angle 4 = 200°$.

$\angle 1 + \angle 2 = 180°$, тогда $\angle 1 = 180° - \angle 2$. $\angle 1 + \angle 4 = 200°$, тогда $\angle 1 = 200° - \angle 4$. Получили, $\angle 1 = 180° - \angle 2 = 200° - \angle 4$. $\angle 4 = 20° + \angle 2$, т.е. $\angle 4$ на 20° больше $\angle 2$, значит $\angle 3$ на 20° меньше $\angle 1$. (*Ответ*: первый угол на 20° больше другого.)

Задача 2

Четыре пересекающиеся в одной точке прямые делят плоскость на 8 углов. Три из этих углов равны 52°, 94° и 16°. Чему равны остальные углы? Чему равны углы между парами прямых?

Решение (см. рис. 1.135): Пусть $\angle 1 = 52°$, $\angle 2 = 94°$, $\angle 3 = 16°$, тогда $\angle 4 = 180° - (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3) = 18°$.

$\angle 1 = \angle 5 = 52°$, $\angle 2 = \angle 6 = 94°$, $\angle 3 = \angle 2 = 16°$, $\angle 4 = \angle 8 = 18°$. (*Ответ*: 52°, 94°, 16°, 18°, 18°.)

Задача 3

Через вершину угла, равного 2α, проведена прямая, перпендикулярная его биссектрисе. Какие углы образует эта прямая со сторонами угла?

Решение (см. рис. 1.136): $\angle AOB = 2\alpha$, тогда $\angle AOC = \angle COB = \alpha$. $OD \perp OC$, тогда $\angle COD = 90°$.

$\angle DOB = 90° + \alpha$, $\angle DOA = 90° - \alpha$. (*Ответ*: $90° + \alpha$, $90° - \alpha$.)

Задача 4

Из точки O на плоскости выходят 4 луча, следующих друг за другом по часовой стрелке: OA, OB, OC и OD. Известно, что сумма углов AOB и COD равна 180°. Докажите, что биссектрисы углов AOC и BOD перпендикулярны.

Решение: $\angle AOB + \angle AOB = 180°$.

Пусть $\angle BOC = \beta$. Пусть $\angle AOB = \alpha$, тогда $\angle COD = 180° - \alpha$. Возможны два случая:

а) См. рис. 1.137.

$\angle BOC$ больше $\angle AOB$, тогда биссектриса $\angle AOC$ проходит во внутренней области $\angle BOC$. (OM – биссектриса $\angle AOC$, ON – биссектриса $\angle BOD$.)

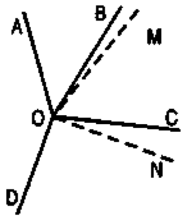


Рис 1 137

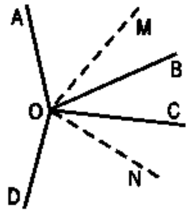


Рис. 1.138

$\angle BOM = \frac{\alpha-\beta}{2}$ $\angle BON = \angle DON = \frac{1}{2}(180° - \alpha + \beta) = 90° -$

$- \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$, тогда $\angle MON = \angle BON - \angle BOM = 90° - \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} -$

$- \frac{\beta-\alpha}{2}$, т.е. $OM \perp ON$.

б) См. рис. 1.138.

$\angle AOB$ больше $\angle BOC$, тогда биссектриса OM угла AOC проходит во внутренней области $\angle AOB$ и $\angle BOM = \frac{\alpha-\beta}{2}$.

$\angle BON = \frac{1}{2}(180° - \alpha + \beta) = 90° - \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$.

Тогда $\angle MON = \angle BON + \angle BOM = 90° - \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2} = 90°$,

то есть $OM \perp ON$.

Домашнее задание

Решить задачи № 76–79.

ГЛАВА II

ТРЕУГОЛЬНИКИ
(уроки 12–29)

Треугольник. Признаки равенства треугольников. Перпендикуляр к прямой. Медианы, биссектрисы и высоты треугольника. Равнобедренный треугольник и его свойства. Основные задачи на построение с помощью циркуля и линейки.

Основная цель – сформировать умение доказывать равенство данных треугольников, опираясь на изученные признаки; отработать навыки решения простейших задач на построение с помощью циркуля и линейки.

При изучении темы следует основное внимание уделить формированию у учащихся умения доказывать равенство треугольников, то есть выделять равенство трех соответствующих элементов данных треугольников и делать ссылки на изученные признаки. На начальном этапе изучения темы полезно больше внимания уделять использованию средств наглядности, решению задач по готовым чертежам.

На изучение темы отведено 17 часов + 1 час повторения на анализ контрольной работы.

Урок 12. Треугольники

Цели урока:

1) повторить понятие треугольника и его элементов;

2) ввести понятие равных треугольников.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Проверка домашнего задания

(Решения задач предложить подготовить заранее трем ученикам.)

Задача № 76

$AB = a$; $AP = 2PQ = 2QB$ (рис. 2.1), тогда P – середина AB.

а) M – середина QB, тогда $AM = AP + PQ + QM = \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}a + \frac{1}{8}a = \frac{7}{8}a$.

б) N – середина AP, тогда $NM = NP + PQ + QM = \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}a + \frac{1}{8}a = \frac{5}{8}a$.

(*Ответ*: а) $\frac{7}{8}a$; б) $\frac{5}{8}a$.)

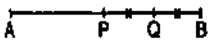


Рис. 2.1

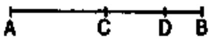


Рис. 2.2

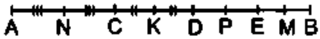


Рис. 2.3

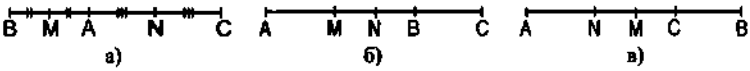


Рис. 2.4

Задача № 77

$AB = m$; $AC = CD + DB$ (см. рис. 2.2).

а) N – середина AC, M – середина DB, тогда $NM = \frac{m}{6} + \frac{m}{3} + \frac{m}{6} = \frac{2m}{3}$.

б) $NM = \frac{m}{10} + \frac{3m}{5} + \frac{m}{10} = \frac{4m}{5}$.

(*Ответ*: а) $\frac{2m}{3}$; б) $\frac{4m}{5}$.)

Задача № 78

$AB = 36$ см; $NM = 30$ см, где N – середина AC, M – середина BE (см. рис. 2.3). Тогда $AN + MB = 6$ см, тогда $AC + BE = 2AN + 2MB = 2(AN + MB) = 12$ см. Следовательно, $CD + DE = 24$ см, тогда $KD + DP = 1/2\ CD + 1/2\ DE = 1/2(CD + DE) = 12$ см, где K – середина CD, P – середина DE. (*Ответ*: 12 см.)

Задача № 79

Возможны три случая (рис. 2.4):

а) $BC = BA + AC = 2MA + 2NA = 2(MA + NA) = 2MN$.

б) $AM = MB$, $AN = NC$. $BC = AC - AB = 2AN - 2AM = 2(AN - AM) = 2MN$.

в) $BC = AB - AC = 2AM - 2AN = 2(AM - AN) = 2MN$.

III. Изучение нового материала

При изучении темы необходимо учесть, что учащиеся имеют представление о треугольниках, его сторонах, углах и вершинах. Поэтому § 14 можно изучить в ходе выполнения следующих упражнений:

– Начертите ΔABC. Укажите:

а) его стороны, вершины, углы;

б) сторону, противолежащую $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$;

в) между какими сторонами заключены $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$;

г) углы, прилежащие стороне AB, BC, AC;

д) угол, противолежащий стороне AB, BC, AC;

е) периметр ΔABC, если $AB = 5$ см, $BC = 7$ см, $AC = 8$ см;

ж) формулу для вычисления периметра ΔABC.

– Как выяснить, равны ли ΔABC и ΔMNK? (*Нужно ΔABC наложить на ΔMNK; если они совместятся полностью, то $\Delta ABC = \Delta MNK$.*)

– Сравнение треугольников способом наложения – процесс не очень удобный. Нельзя ли каким-нибудь другим способом проверить, равны ли данные треугольники? (*Нужно проверить, равны ли соответствующие элементы (стороны и углы) данных треугольников.*)

Записать на доске и в тетрадях:

Если $\Delta ABC = \Delta MNK$, то $AB = MN$, $BC = NK$, $AC = MK$ и $\angle A = \angle M$, $\angle B = \angle N$, $\angle C = \angle K$.

IV. Закрепление изученного материала

1. Решить устно задачи №50 и 52 из рабочей тетради.

Задача № 50

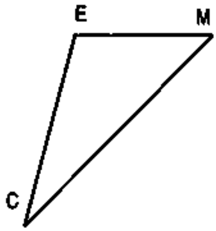


Рис. к задаче 50

а) Запишите все возможные обозначения данного треугольника.

б) Укажите: сторону, лежащую против угла *C*; угол, лежащий против стороны *CM*; углы, прилежащие к стороне *EC*; угол между сторонами *EC* и *EM*.

в) Измерьте меньшую сторону данного треугольника и его больший угол и запишите результат измерений.

(*Ответ*: а) ΔCEM, ΔEMC, ΔCME, ΔECM, ΔMCE, ΔMEC; б) Против угла *C* лежит сторона *EM*; против стороны *CM* лежит угол *E*; к стороне *EC* прилежат углы *C* и *E*; между сторонами *EC* и *EM* – угол *E*; в) $EM = 2$ см; $\angle CEM = 120°$.)

Задача № 52

При наложении треугольника *ABC* на треугольник *MKH* сторона *AB* совместилась со стороной *MK*, сторона *AC* – со стороной *MH*.

Совместилась ли сторона *BC* со стороной *KH*? Объясните ответ.

Решение: Так как стороны *AB* и *AC* совместились со сторонами *MK* и *MH*, то точки *B* и *C* совместились соответственно с точками *K* и *H*. Следовательно, концы отрезков *BC* и *KH* совместились, а значит, *BC* и *KH* совместились. (*Ответ*: совместилась.)

2. Выполнить практическое задание № 89 (а, б).

3. Решить задачу № 91 (один ученик решает у доски, остальные в тетрадях):

Задача № 91

Дано: $P_{ABC} = 48$ см, $AC = 18$ см, $BC - AB = 4{,}6$ см.

Найти: *AB* и *BC*.

Решение: Пусть $AB = x$ см, тогда $BC = (x + 4{,}6)$ см, так как $BC - AB = 4{,}6$ см. $P_{ABC} = AB + BC + AC = 48$ см, тогда $x + (x + 4{,}6) + 18 = 48$, откуда $x = 12{,}7$ см. Итак, $AB = 12{,}7$ см, $BC = 17{,}3$ см. (*Ответ*: $AB = 12{,}7$ см, $BC = 17{,}3$ см.)

Наводящие вопросы к задаче № 91.

1) Как вы понимаете условие «разность двух сторон равна 4,6 см»?

2) Известна ли сумма неизвестных сторон треугольника? Можно ли ее найти?

3) Как найти два числа, если известны их сумма и разность?

4) Решить задачу устно:

$\Delta ABC = \Delta MNP$, причем $\angle A = \angle M$, $\angle B = \angle N$, $\angle C = \angle P$. Найдите неизвестные стороны ΔABC и ΔMNP, если известно, что $AB = 7$ см, $NP = 5$ см, $AC = 3$ см.

V. Самостоятельное решение задач

(Учитель контролирует работу учащихся, решающих задачи I уровня, у учащихся, решающих задачи II уровня, в конце урока можно собрать тетради на проверку.)

I уровень

1. *Дано*: $AB = AC = BC$, $AD = DC$ (рис. 2.5).

$P_{ABC} = 36$ см, $P_{ADC} = 40$ см.

Найти: стороны ΔABC, ΔADC.

Решение: $P_{ABC} = 36$ см, тогда $AB = AC = BC = 12$ см. $P_{ADC} = AD + DC + AC = 40$ см. Так как $AC = 12$ см, $AD = DC$, то $AD = 14$ см, $DC = 14$ см. (*Ответ*: $AB = AC = BC = 12$ см, $AD = DC = 14$ см.)

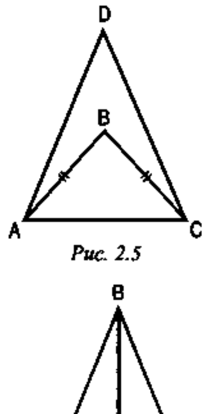


Рис. 2.5

2. а) *Дано*: $\Delta ABD = \Delta CDB$, $\angle FAB = 160°$ (рис. 2.6).

Найти: $\angle BCD$.

Решение: $\angle BAD = 180° - \angle FAB = 20°$. $\Delta ABD = \Delta CDB$, тогда $\angle BAD = \angle BCD = 20°$. (*Ответ*: $\angle BCD = 20°$.)

б) *Дано*: $\Delta ABD = \Delta CDB$, $\angle BCD : \angle FAB = 1 : 5$.

Найти: $\angle BAD$.

Решение: $\Delta ABD = \Delta CDB$, тогда $\angle BAD = \angle BCD$. $\angle BCD : \angle FAB = 1 : 5$, значит, $\angle BAD : \angle FAB = 1 : 5$, а так как эти углы смежные, то $\angle BAD + \angle FAB = 180°$, откуда $\angle BAD = 30°$. (*Ответ*: $\angle BAD = 30°$.)

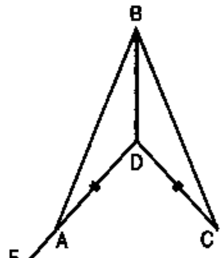


Рис 2.6

II уровень

1. В треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 8$ см, $E \in BC$, причем $BE = EC$. Точка E делит периметр ΔABC на две части, из которых одна больше другой на 2 см. Найдите AB.

Решение (см. рис. 2.7): $P_{ABE} = AB + BE + AE = AB + 1/2AB + AE$, $P_{AEC} = AE + EC + AC = AE + 1/2AB + 8$.

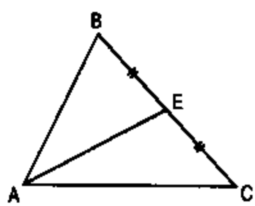


Рис 2.7

Возможны следующие случаи:

1) P_{ABE} больше P_{AEC} на 2 см, тогда $AB + 1/2\ AB + AE = AE + 1/2\ AB + 8 + 2$, откуда $AB = 10$ см;

2) P_{AEC} больше P_{ABE} на 2 см, тогда $AB + 1/2\ AB + AE + 2 = AE + 1/2\ AB + 8$, откуда $AB = 6$ см.

(*Ответ*: 10 см или 6 см.)

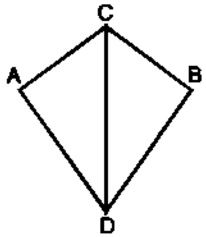


Рис. 2.8

2. *Дано*: $\Delta\ ABD = \Delta\ CBD$, $AD = DC$, $\angle ABC = 110°$, $\angle BAD = 90°$ (рис. 2.8).

Найти: $\angle ABD$.

Доказать: $BC \perp CD$.

Решение: $\Delta\ ABD = \Delta\ CBD$, $AD = DC$, тогда $\angle ABD = \angle CBD$, а так как $\angle ABC = 110°$, то $\angle ABD = 55°$. (*Ответ*: $\angle ABD = 55°$.)

Доказательство: $\angle BAD = 90°$, а так как $\Delta\ ABD = \Delta\ CBD$, то и $\angle BCD = 90°$, то есть $BC \perp CD$.

Домашнее задание

1. § 14, вопросы 1, 2.
2. Решить задачи № 90, 92.
3. Выполнить практическое задание: I уровень – задачи №51, 53 из рабочей тетради; II уровень – задачи №83, 87 из учебника.

Задача № 51

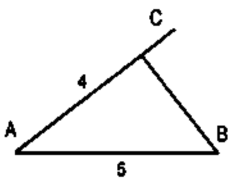


Рис к задаче 51

а) С помощью масштабной линейки закончите построение треугольника ABC, если $AB = 5$ см, $AC = 4$ см.

б) Измерьте градусные меры углов B и C построенного треугольника ABC и запишите результат измерения.

в) Измерьте сторону BC и найдите периметр треугольника ABC.

(*Ответ*: б) $\angle B = 52°$, $\angle C = 90°$; в) $BC = 3$ см и $P_{ABC} = 12$ см.)

Задача № 53

На рисунке изображены равные треугольники ABC и POT.

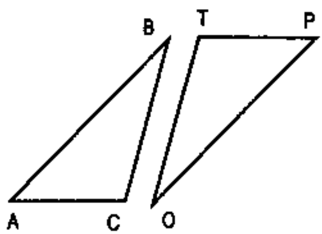


Рис. к задаче 53

а) Укажите соответственно равные элементы этих треугольников.

б) Измерьте сотроны и углы треугольника ABC и запишите результат измерений.

в) Не измеряя, найдите длины сторон и градусные меры углов треугольника POT.

(*Ответ*: а) $AC = PT$, $CB = TO$, $AB = PO$, $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle O$, $\angle C = \angle T$;

б) AB = 35 мм, AC = 13 мм, BC = 26 мм, $\angle A = 37°$, $\angle B = 18°$, $\angle C = 125°$;
в) TP = 13 мм, TO = 26 мм, PO = 35 мм, $\angle P = 37°$, $\angle O = 18°$, $\angle T = 125°$.

4. *Дополнительная задача:*

Треугольник ABC равен треугольнику $A_1B_1C_1$. Периметр (P) треугольника ABC равен 39 см. Сторона A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$ в 1,5 раза меньше стороны B_1C_1, а A_1C_1 на 3 см меньше стороны A_1B_1. Найдите большую сторону треугольника ABC.

Урок 13. Первый признак равенства треугольников

Цели урока:

1) ввести понятие теоремы и доказательства теоремы;

2) доказать первый признак равенства треугольников;

3) научить решать задачи на применение первого признака равенства треугольников.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Повторение. Проверка домашнего задания

1. Теоретический опрос по вопросам 1, 2.
2. Выполнить практические задания (устно):

– Назовите углы: а) треугольника DEK, прилежащие к стороне EK; б) треугольника MNP, прилежащие к стороне MN.
– Назовите угол: а) треугольника DEK, заключенный между сторонами DE и DK; б) треугольника MNP, заключенный между сторонами NP и PM.
– Между какими сторонами: а) треугольника DEK заключен угол K; б) треугольника MNP заключен угол N?
– $\Delta ABC = \Delta PSK$. Назовите равные стороны и равные углы в этих треугольниках.

3. Проверка решения дополнительной домашней задачи.

(Решение задачи попросить подготовить на доске одного из учащихся до начала теоретического опроса.)

Решение: $P_{ABC} = 39$ см, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, тогда $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$. Пусть $A_1B_1 = x$ см, тогда $B_1C_1 = 1{,}5x$ см, $A_1C_1 = (x - 3)$ см.

Так как $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, то $P_{ABC} = P_{A_1B_1C_1} = x + 1{,}5x + x - 3 = 39$, откуда $x = 12$ см, $A_1B_1 = 12$ см, $B_1C_1 = 12 \cdot 1{,}5 = 18$ см, $A_1C_1 = 9$ см. Так как $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, а в $\Delta A_1B_1C_1$ большая сторона равна 18 см, то и в ΔABC большая сторона равна 18 см. (*Ответ*: 18 см.)

III. Решение задач

I уровень

Устное решение задач по готовым чертежам:

(Рисунки и условия задач подготовлены учителем на доске заранее.)

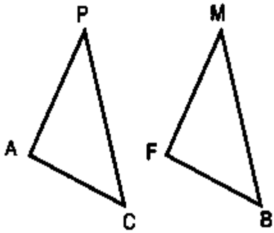


Рис. 2.9

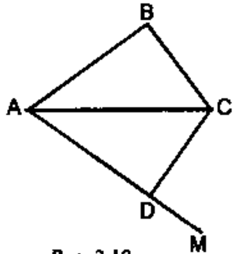


Рис. 2.10

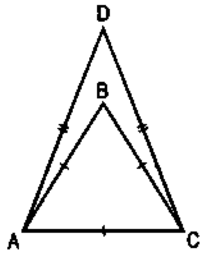


Рис. 2.11

1. Рис. 2.9.
Дано: $\Delta\, APC = \Delta\, MFB$, $\angle P = \angle M$, $FB = 17$ см, $\angle A = \angle F$, $PC = 23$ см.
Найти: *AC*, *MB*.
2. Рис. 2.10.
Дано: $\Delta\, ABC = \Delta\, ADC$, $\angle ABC = 70^\circ$, $AB = 10$ см.
Найти: $\angle MDC$, *AD*.
3. Рис. 2.11.
Дано: $AB = BC = AC$, $AD = CD$, $P_{ABC} = 36$ м, $P_{ADC} = 40$ см.
Найти: стороны $\Delta\, ABC$, $\Delta\, ADC$.

II уровень

(Условия задач каждый ученик получает в распечатанном виде, работу учащиеся выполняют на листочках и сдают на проверку учителю до начала изучения нового материала.)

Решить самостоятельно:

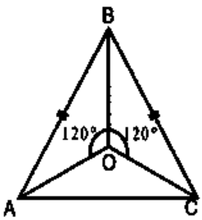


Рис. 2.12

1. *Дано*: в $\Delta\, ABC$ $AB = AC$. Внутри треугольника выбрана точка *O* так, что $\angle AOB = \angle AOC$, $\angle AOB = 120^\circ$.
Доказать: *AO* – биссектриса $\angle BAC$.
Найти: $\angle BOC$.
Доказательство (см. рис. 2.12): Если наложить $\Delta\, BAO$ на $\Delta\, CAO$, то $\angle BOA$ совместится с углом *AOC*, *AO* – общая сторона, *AB* совместится с *AC*, и $\Delta\, BAO$ совместится с $\Delta\, CAO$, значит, $\angle BAO = \angle CAO$, то есть *AO* – биссектриса $\angle BAC$.
Решение: $\angle BOC = 360^\circ - (\angle AOB + \angle AOC) = 120^\circ$. (*Ответ*: $\angle BOC = 120^\circ$.)

Рис. 2.13

2. Рис. 2.13.
Дано: $\Delta\, ABC = \Delta\, CDA$, $AB = CD = 20$ см, $BO = DO = 5$ см, $P_{ABC} = 50$ см, *AO* больше *AC* на 5 см.
Найти: P_{AOC}.
Решение: Так как $\Delta\, ABC = \Delta\, CDA$, то $AB = CD$, $BC = AD$, $AC = AC$. Так как $BC = AD$ и $BO = OD$, то $AO = OC$. *AO* больше *AC* на 5 см.

Тогда $AO = AC + 5$ см.

$P_{ABC} = AB + BC + AC = AB + BO + OC + AC = 20 + 5 + AC + 5 + AC = 50.$

Тогда $AC = 10$ см, $AO = 15$ см, $OC = 15$ см, $P_{AOC} = 40$ см. (*Ответ*: $P_{AOC} =$ $= 40$ см.)

IV. Изучение нового материала

(Проводится в форме беседы учителя с учащимися, теорему лучше доказать самому учителю.)

– Какие условия должны выполняться для того, чтобы ΔABC был равен $\Delta A_1B_1C_1$? ($AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.)
– Нельзя ли уменьшить количество условий для доказательства равенства двух треугольников?

Оказывается, не нужно проверять равенство всех сторон и углов одного треугольника сторонам и углам другого треугольника. Достаточно сравнить лишь три элемента одного треугольника с тремя элементами другого. О том, какие именно элементы нужно сравнивать, нам расскажут ***признаки равенства треугольников.***

Сегодня мы изучим первый признак равенства треугольников, который гласит:

Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Это утверждение нам необходимо доказать, а в математике каждое утверждение, справедливость которого устанавливается путем рассуждений, называется ***теоремой***, а сами рассуждения называются ***доказательством*** теоремы.

– Какие теоремы нам уже известны? (*Свойство смежных углов и свойство вертикальных углов.*)
– Любая теорема состоит из условия и заключения. Как вы понимаете, что может означать словосочетание «условие теоремы», а что – «заключение теоремы»? (*Условие – это уже известные факты, о которых говорится в теореме, а заключение – это то, что нужно получить, доказать.*)
– Выделите условие теоремы первого признака равенства треугольников. Выделите заключение.

Итак, докажем первый признак равенства треугольников:

Дано (условие): ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$.

Доказать (заключение): $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство: см. п. 15 учебника.

Первый признак равенства треугольников удобнее называть признаком равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними.

V. Закрепление изученного материала

1. Решить задачу №54 из рабочей тетради устно.
2. Устно решить задачи по готовым чертежам:

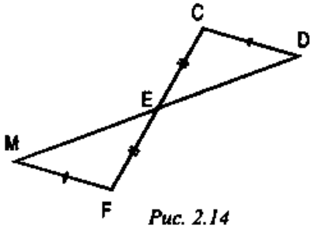


Рис. 2.14

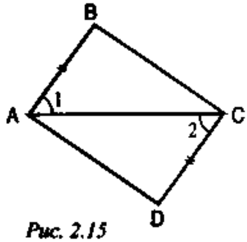


Рис. 2.15

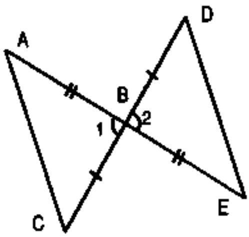


Рис. к задаче 93

а) Рис. 2.14.
Доказать: $\Delta\ MEF = \Delta\ DEC$.
б) Рис. 2.15.
Доказать: $\angle B = \angle D$.
3. Письменно решить задачу № 93.
Задача № 93
(Один из учащихся работает у доски, остальные в тетрадях.)
а) В $\Delta\ ABC$ и $\Delta\ EBD$:
1) $AB = BE$ (B – середина AE);
2) $CB = BD$ (B – середина CD);
3) $\angle 1 = \angle 2$ (вертикальные) => $\Delta\ ABC = \Delta\ EBD$ по двум сторонам и углу между ними.
б) Так как $\Delta\ ABC = \Delta\ EBD$ по доказанному, то $\angle A = \angle E = 42^\circ$, $\angle C = \angle D = 47^\circ$. (*Ответ*: $\angle A = 42^\circ$, $\angle C = 47^\circ$.)
Наводящие вопросы к задаче № 93.
а) 1) Перечислите все известные вам способы доказательства равенства двух треугольников.
2) Какой из этих способов подойдет для доказательства равенства данных треугольников?
3) Сколько пар равных элементов и каких нужно найти для доказательства равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними?
4) Укажите две пары равных сторон треугольников ABC и EBD.
5) Какие углы должны быть равны, чтобы треугольники ABC и EBD были равны? Равны ли они? Почему?
б) 1) Мы доказали, что треугольник ABC равен треугольнику EBD. О чем это говорит?
2) Назовите углы треугольника ABC соответственно равные углам E и D треугольника EBD. Чему равны их градусные меры.
4. Самостоятельно решить задачи:

I уровень (под постоянным контролем учителя)

Решить задачу №55 из рабочей тетради.
1. Рис. 2.16.
Дано: $AA_1 = CC_1$, $BC = B_1C_1$, $BC \perp AC$, $B_1C_1 \perp A_1C_1$.
Доказать: $\Delta\ ABC = \Delta\ A_1B_1C_1$.

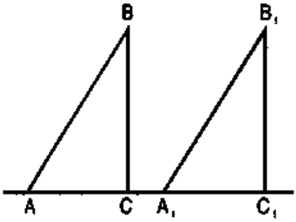


Рис. 2.16

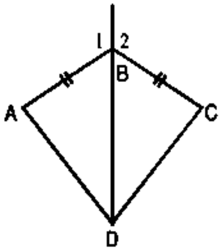


Рис. 2.17

Рис. 2.18

2. Рис. 2.17.

Дано: $AB = BC$, $\angle 1 = \angle 2$.

Доказать: $\angle ADB = \angle CDB$, DB – биссектриса $\angle ADC$.

II уровень **(с проверкой учителя по окончании работы)**

1. Рис. 2.18.

Дано: $\angle BDC = \angle BEA$, $AD = EC$, $BD = BE$, $\angle BCE = 64°$.

Доказать: $\Delta ABD = \Delta CBE$.

Найти: $\angle BAD$.

2. Рис. 2.19.

Дано: $AB = AD$, $AC = AE$, $\angle BAD = \angle CAE$.

Найти: равны ли BC и DE, $\angle MCA$ и $\angle KEA$?

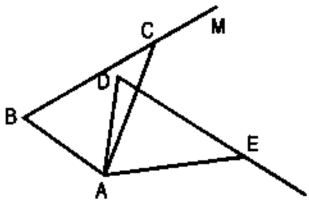


Рис. 2.19

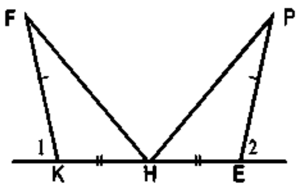


Рис. 2.20

Домашнее задание

1. § 15, вопросы 3, 4.
2. Решить задачи № 94, 95, 96.
3. Дополнительная задача:

Рис. 2.20.

Дано: $\angle 1 = \angle 2$, $KF = EP$, H – середина KE.

Доказать: $\Delta KFH = \Delta EPH$.

Урок 14. Решение задач на применение первого признака равенства треугольников

Цели урока:

1) совершенствование навыков решения задач на применение первого признака равенства треугольников;

2) закрепление умения доказывать теоремы.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Проверка домашнего задания. Повторение

1) Проверить решение домашних задач № 95, 96 и дополнительной задачи. (Решения задач попросить оформить на доске трех учащихся до начала урока.)

Задача № 95

а) В ΔABC и ΔCDA $BC = AD$ (по условию), AC – общая сторона, $\angle 1 = \angle 2$ (по условию) => $\Delta ABC = \Delta CDA$ по двум сторонам и углу между ними.

б) Так как $\Delta ABC = \Delta CDA$, то $AB = CD = 14$ см, $BC = AD = 17$ см.

(*Ответ*: $AB = 14$ см; $BC = 17$ см.)

Задача № 96

а) В ΔAOB и ΔDOC $BO = OC$, $OA = OD$ (по условию), $\angle AOB = \angle DOC$ (они вертикальные) => $\Delta AOB = \Delta DOC$ по двум сторонам и углу между ними.

б) Так как $\Delta AOB = \Delta DOC$, то $\angle OCD = \angle 1 = 74°$.

$\angle ACD = \angle ACO + \angle OCD = 36° + 74° = 110°$.

(*Ответ*: $\angle ACD = 110°$.)

Решение дополнительной задачи:

В ΔKFH и ΔEPH $KF = EP$ (по условию задачи), $KH = EH$ (H – середина KE), $\angle FKH = \angle PEH$ ($\angle 1 = \angle 2$ по условию => смежные с ними углы равны) => $\Delta KFH = \Delta EPH$.

2) Решить устно задачи на готовых чертежах и тестовое задание:

1. *Дано*: $\Delta MPC = \Delta DAB$, $MP = 12$ см, $CP = 8$ см, $\angle A = 73°$. Какое из следующих высказываний верно?

а) $DB = 8$ см, $AB = 12$ см;

б) $\angle M = 73°$, $AB = 8$ см;

в) $AD = 12$ см, $\angle P = 73°$;

г) $AB = 12$ см, $\angle P = 73°$.

2. Рис. 2.21.

Дано: $\angle 1 = \angle 2$, $AD = AB$, $\angle ACB = 58°$, $\angle ABC = 102°$, $DC = 8$ см.

Найти: $\angle ADC$, $\angle ACD$, BC.

3. Рис. 2.22.

Дано: $BC = AD$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle ACD = 42°$, $\angle ADC = 108°$, $CD = 6$ см.

Найти: AB, $\angle CAB$, $\angle ABC$.

3) Решить задачу № 58 из рабочей тетради.

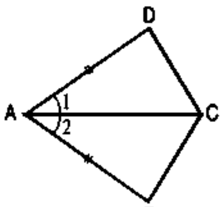


Рис. 2.21

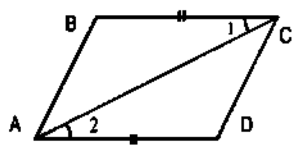


Рис 2 22

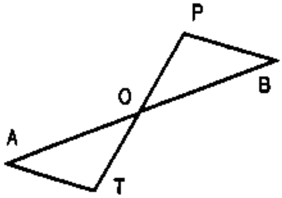


Рис. к задаче 56

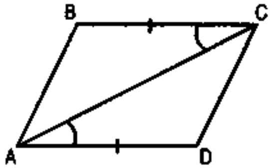


Рис к задаче 57

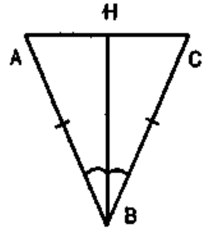


Рис. к задаче 58

Задача № 56

На рисунке к задаче точка O – середина отрезка AB, $AT = BP$, $\angle OAT = \angle OBP$. Докажите, что точка O – середина отрезка PT.

Доказательство:

1) $AO = OB$, так как точка O – середина отрезка AB.

2) $\Delta AOT = \Delta BOP$, так как $AO = OB$, $AT = BP$, $\angle AOT = \angle OBP$ (по двум сторонам и углу между ними). Поэтому $OT = OP$, т.е. точка O – середина отрезка PT.

Задача № 57

На рисунке $\angle CAD = \angle ACB$, $AD = BC$. Докажите, что $AB = CD$.

Доказательство:

1) AC – общая сторона треугольников ABC и CDA.

2) $\Delta CAD = \Delta ACB$ по двум сторонам и углу между ними (AC – общая сторона, $AD = BC$ и $\angle CAD = \angle ACB$ по условию). Поэтому $AB = CD$.

Задача № 58

Дано: $AB = CB$, $\angle ABH = \angle CBH$ (см. рисунок).

Доказать: $AH = HC$.

Доказательство: $\Delta ABH = \Delta CBH$ по двум сторонам и углу между ними (BH – общая сторона, $AB = CB$, $\angle ABH = \angle CBH$). Поэтому $AH = CH$.

Задача № 59

На рисунке к задаче 58 $\angle ABH = \angle CBH$, $AB = CB$.

Докажите, что $\angle AHB = 90°$.

Доказательство:

1) $\Delta ABH = \Delta CBH$ по двум сторонам и углу между ними (BH – общая сторона, $AB = CB$ и $\angle ABH = \angle CBH$ по условию).

2) Так как $\Delta ABH = \Delta CBH$, то $\angle ABH = \angle CHB$. Но углы AHB и CHB – смежные, поэтому $\angle AHB + \angle CHB = 180°$, т.е. $2\angle AHB = 180°$, следовательно, $\angle AHB = 90°$.

4. Решить письменно задачу с полным оформлением решения на доске и в тетрадях учащихся:

Дано: $\angle ABE = \angle ECD$, $BE = CE$, $BK = LC$, $\angle BKE = 110°$ (рис. 2.23).

Доказать: $\Delta BEK = \Delta ELC$.

Найти: $\angle ELC$.

Возможное оформление решения задачи:

Дано: $\angle ABE = \angle ECD$, $BE = CE$, $BK = LC$, $\angle BKE = 110°$ (рис. 2.24).

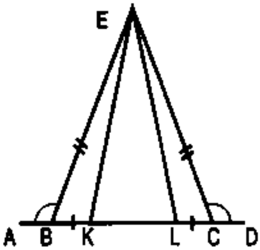


Рис. 2.23

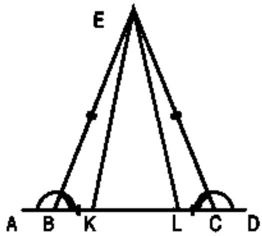


Рис. 2.24

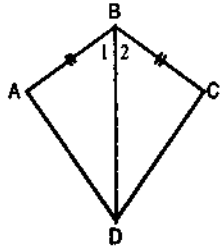


Рис. 2.25

Доказать: $\Delta BEK = \Delta ELC$.

Найти: $\angle ELC$.

Доказательство: $\angle ABE$ и $\angle KBE$ – смежные, $\angle ABE + \angle KBE = 180°$, значит $\angle KBE = 180° - \angle ABE$. $\angle DCE$ и $\angle LCE$ – смежные, $\angle DCE + \angle LCE = 180°$, значит $\angle LCE = 180° - \angle DCE$.

По условию задачи $\angle ABE = \angle DCE$, по доказанному $\angle KBE = 180° - \angle ABE$, $\angle LCE = 180° - \angle DCE$, следовательно, $\angle KBE = \angle LCE$.

В ΔBEK и ΔCEL:

1) $BK = LC$ по условию задачи;

2) $BE = CE$ по условию задачи;

3) $\angle KBE = \angle LCE$ по доказанному, следовательно, $\Delta BEK = \Delta CEL$ по двум сторонам и углу между ними.

Решение: Так как $\Delta BEK = \Delta CEL$ по доказанному, то $\angle ELC = \angle BKE = 110°$. (*Ответ*: $\angle ELC = 110°$.)

Наводящие вопросы к задаче:

1) Назовите равные элементы треугольников BEK и ELC.

2) Почему $\angle EBK = \angle ECL$?

3) Чему равен $\angle ELC$?

III. Самостоятельная работа

В конце урока тетради учащиеся сдают на проверку учителю.

I уровень

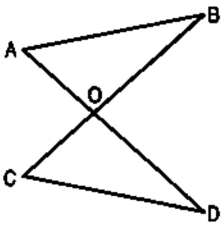


Рис 2 26

Вариант I

1. Рис. 2.25.

Дано: $\angle 1 = \angle 2$, $AB = BC$.

Доказать: $\Delta ABD = \Delta CBD$.

2. Равные отрезки AB и CD точкой пересечения O делятся пополам. Докажите, что $\Delta AOC = \Delta BOD$, и найдите AC, если $BD = 12$ см.

Вариант II

1. Рис. 2.26.

Дано: $AO = CO$, $BO = DO$.

Доказать: $\Delta AOB = \Delta COD$.

2. Равные отрезки MN и LP точкой пересечения O делятся пополам. Докажите, что $\Delta MOL = \Delta NOP$ и найдите NP, если $ML = 14$ см.

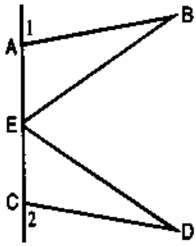


Рис. 2.27

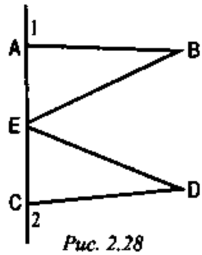


Рис. 2.28

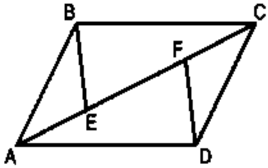


Рис. 2.29

II уровень

Вариант I

1. Рис. 2.27.

Дано: $AB = CD$, $\angle 1 = \angle 2$, E – середина AC, $BE = 10$ см.

Найти: DE.

2. Известно, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, причем $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. На сторонах AC и A_1C_1 отмечены точки D и D_1 так, что $CD = C_1D_1$. Докажите, что $\Delta CBD = \Delta C_1B_1D_1$.

Вариант II

1. Рис. 2.28.

Дано: $\angle 1 = \angle 2$, $AB = CD$, E – середина AC, $DE = 9$ см.

Найти: BE.

2. Известно, что $\Delta MKP = \Delta M_1K_1P_1$, причем $\angle M = \angle M_1$, $\angle K = \angle K_1$. На сторонах MP и M_1P_1 отмечены точки E и E_1 так, что $ME = M_1E_1$. Докажите, что $\Delta MEK = \Delta M_1E_1K_1$.

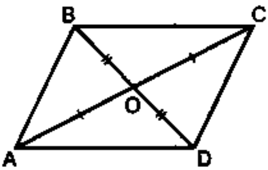


Рис. 2.30

III уровень

Вариант I

1. Рис. 2.29.

Дано: $\Delta BEC = \Delta DFA$.

Доказать:

1) $\Delta ABC = \Delta CDA$;

2) $\Delta AEB = \Delta CFD$.

2. Рис. 2.30.

Сколько пар равных треугольников на рисунке? Запишите все пары.

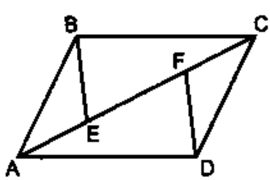


Рис 2.31

Вариант II

1. Рис. 2.31.

Дано: $\Delta AEB = \Delta CFD$.

Доказать:

1) $\Delta ABC = \Delta CDA$;

2) $\Delta BEC = \Delta DFA$.

2. Рис. 2.32.

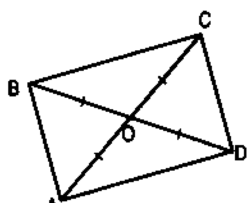


Рис. 2.32

Сколько пар равных треугольников на рисунке? Запишите все пары.

Домашнее задание

1. Решить задачи: I уровень – № 56, 57, 59 из рабочей тетради; II уровень – № 97, 98, 99 из учебника.
2. *Дополнительная задача:*

В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AC = A_1C_1$, $AB = A_1B_1$ и $\angle A = \angle A_1$, $D \in BC$, $DC = 2\ BD$, $D_1 \in B_1C_1$, $D_1C_1 = 2\ B_1D_1$. Докажите, что $AD = A_1D_1$.

Урок 15. Медианы, биссектрисы и высоты треугольника

Цели урока:

1) ввести понятие перпендикуляра к прямой, медианы, биссектрисы и высоты треугольника;

2) доказать теорему о перпендикуляре;

3) научить строить медианы, биссектрисы и высоты треугольника.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Проверка домашнего задания. Повторение

Проверяются домашние задачи № 98, 99.

(Решение задач попросить оформить на доске двух учеников.)

Задача № 98

Решение (см. рис. 2.33): В ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$: $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, тогда $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по двум сторонам и углу между ними.

Так как $AP = A_1P_1$ и $AB = A_1B_1$, то $PB = P_1B_1$.

Так как $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, то $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$. Тогда $\Delta BPC = \Delta B_1P_1C_1$ по двум сторонам и углу между ними.

Задача № 99

Решение (см. рис. 2.34): $AC = AD$, $AB = AE$, тогда $\Delta ABD = \Delta AEC$ по двум сторонам и углу между ними ($\angle A$ – общий).

Так как $\Delta ABD = \Delta AEC$, то $\angle ABD = \angle AEC$. $\angle CBD$ и $\angle ABD$ – смежные, тогда $\angle CBD = 180° - \angle ABD$

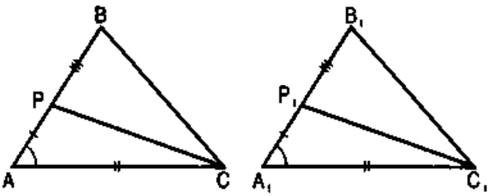


Рис. 2.33

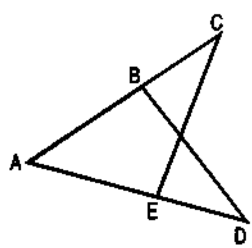


Рис. 2.34

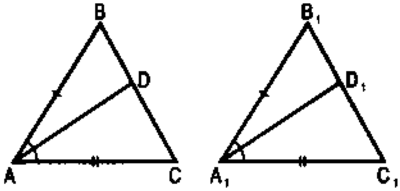


Рис. 2.35

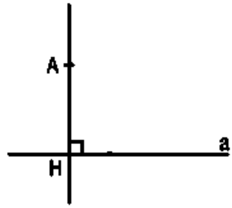


Рис. 2.36

$\angle AEC$ и $\angle DEC$ – смежные, тогда $\angle DEC = 180^\circ - \angle AEC$.

Так как $\angle ABD = \angle AEC$, то $\angle CBD = \angle DEC$.

Анализ самостоятельной работы

а) Сделать общий анализ самостоятельной работы и разобрать устно задачи, с которыми учащиеся не справились.

б) Работа над ошибками.

Пока идет работа над ошибками, индивидуально проверить дополнительную домашнюю задачу:

Решение (см. рис. 2.35): $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по двум сторонам и углу между ними ($AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$), тогда $BC = B_1C_1$.

Так как $DC = 2\ BD$, $D_1C_1 = 2\ B_1D_1$ и $BC = B_1C_1$, то $BD = B_1D_1$.

Так как $AB = A_1B_1$, $BD = B_1D_1$, $\angle B = \angle B_1$ из равенства ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$, то $\Delta ABD = \Delta A_1B_1D_1$, тогда $AD = A_1D_1$.

III. Изучение нового материала

1. Практическое задание (учитель это же задание выполняет на доске):

– Начертите прямую a и отметьте точку A, не лежащую на прямой (рис. 2.36).

– Через точку A проведите прямую, перпендикулярную прямой a. Точку пересечения прямых обозначьте H.

– Запишите в тетрадях:

Отрезок AH – перпендикуляр, проведенный из точки A к прямой a, если: 1) $AH \perp a$; 2) $A \notin a$, $H \in a$.

Теорема о перпендикуляре:

Из точки, не лежащей на прямой, можно провести перпендикуляр к этой прямой и притом только один.

Дано: a – прямая, точка $A \notin a$.

Доказать:

1) из точки A к прямой а можно провести перпендикуляр;

2) из точки A к прямой а можно провести единственный перпендикуляр.

Доказательство: см. п. 16 учебника.

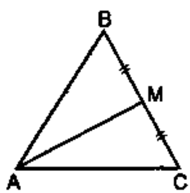


Рис. 2 37

2. Определение: отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны, называется ***медианой треугольника***.

На доске и в тетрадях рисунок (рис. 2.37) и запись:

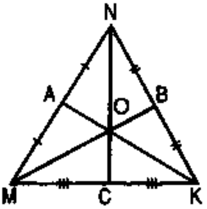


Рис. 2.38

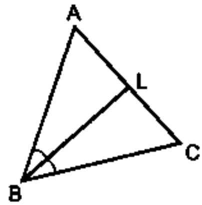


Рис. 2 39

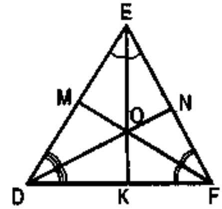


Рис. 2.40

***AM* – медиана Δ *ABC*, если *BM* = *MC*, где *M* $\in$ *BC*.**

– Начертите Δ *MNK* и постройте его медианы.

(На доске это же задание выполняет один из учащихся по указанию учителя.)

На доске и в тетрадях рисунок (рис. 2.38) и запись:

***MB, KA, NC* – медианы Δ *MNK*. *MB* $\cap$ *KA* $\cap$ *NC* = *O*.**

3. Определение: отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны, называется ***биссектрисой треугольника***.

На доске и в тетрадях рисунок (рис. 2.39) и запись:

***BL* – биссектриса Δ *ABC*, если $\angle$ *ABL* = $\angle$ *CBL*, где *L* $\in$ *AC*.**

– Начертите Δ *DEF* и постройте его биссектрисы.

(На доске это же задание выполняет один из учащихся по указанию учителя.)

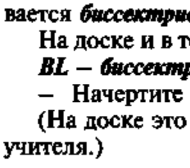


Рис 2.41

На доске и в тетрадях рисунок (рис. 2.40) и запись:

***DN, EK, FM* – биссектрисы Δ *DEF*. *DN* $\cap$ *EK* $\cap$ $\cap$ *FM* = *O*.**

4. Определение: перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону, называется ***высотой треугольника***.

На доске и в тетрадях рисунок (рис. 2.41) и запись:

***BH* – высота Δ *ABC*, если *BH* $\perp$ *AC*, *H* $\in$ *AC*.**

– Начертите остроугольный, прямоугольный и тупоугольный треугольники и постройте их высоты.

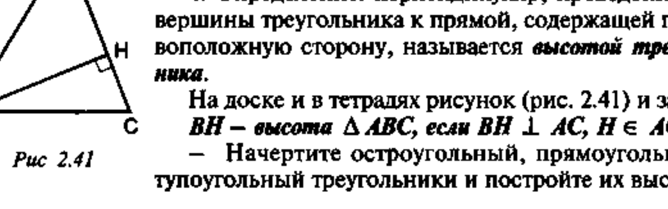


Рис 2.42

(К доске вызвать трех учеников, первый из них строит высоты для остроугольного треугольника, второй для прямоугольного, третий – тупоугольного.)

На доске и в тетрадях рисунок (рис. 2.42 см. на стр. 72) и запись:

AH_1, BH_2, CH_3 *– высоты* ΔABC. $AH_1 \cap BH_2 \cap CH_3 = O$.

Точка пересечения высот в остроугольном треугольнике находится внутри треугольника, в прямоугольном треугольнике совпадает с вершиной прямого угла, в тупоугольном треугольнике находится за пределами треугольника.

IV. Закрепление изученного материала

1. Решить устно задачи № 60 (а) и № 63 из рабочей тетради.

2. Решить задачи № 105 (б), 106 (б) письменно у доски и в тетрадях учащихся.

Задача № 105 (б)

Дано: $AB \perp a$, $CD \perp a$, $AB = CD$, $\angle ADB = 44°$.

Найти: $\angle ABC$.

Решение: $\Delta ABC = \Delta CDB$ по двум сторонам и углу между ними ($AB = CD$, BD – общая сторона, $\angle ABD = \angle CDB$) => $\angle ADB = \angle CBD = 44°$.

$\angle ABC = \angle ABD - \angle CBD = 90° - 44° = 46°$. (*Ответ*: $\angle ABC = 46°$.)

Наводящие вопросы:

1) Частью какого угла является угол ABC?

2) Знаете ли вы градусные меры углов ABD и CBD?

3) Что вы можете сказать о треугольниках ABC и CDB?

4) Чему равна градусная мера угла ABC?

Задача № 106 (б)

Дано: ΔABC; AD – медиана; $AD = DE$; $\angle ACD = 56°$; $\angle ABD = 40°$; A, D, E лежат на одной прямой.

Найти: $\angle ACE$.

Решение: $\Delta ABD = \Delta ECD$ по двум сторонам и углу между ними ($AD = DC$, так как AD – медиана, $AD = DE$, $\angle ADB = \angle EDC$ как вертикальные) => $\angle DCE = \angle ABD = 40°$ => $\angle ACE = \angle ACD + \angle DCE = 56° + 40° = 96°$. (*Ответ*: $\angle ACE = 96°$.)

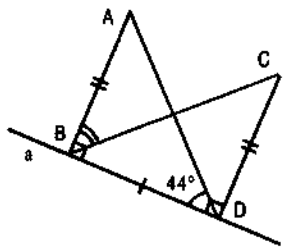


Рис. к задаче 105 (б)

Наводящие вопросы:

1) Суммой каких двух углов является угол ACE?

2) Известны ли градусные меры углов ACD и DCE?

3) Что вы можете сказать о треугольниках ABD и ECD?

4) Чему равна градусная мера угла ACE?

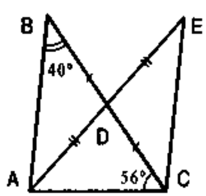


Рис. к задаче 106 (б)

3. Самостоятельное решение тестовых заданий с последующей самопроверкой:

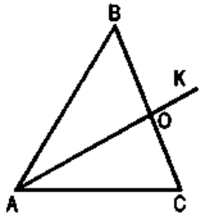


Рис. 2.43

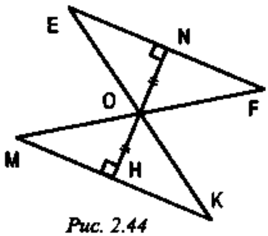


Рис. 2.44

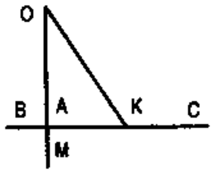


Рис. к задаче 61

1) Рис. 2.43.

Дано: AO – медиана ΔABC, $AO = OK$, $AB = 6{,}3$ см, $BC = 6{,}5$ см, $AC = 6{,}7$ см.

Найти: CK.

а) 6,4 см; б) 6,7 см;
в) 6,5 см; г) 6,3 см.

2) Рис. 2.44.

Дано: OH и ON – высоты ΔMOK и ΔEOF, $OH = ON$, $EN = 7{,}8$ см, $OE = 8{,}6$ см, $HM = 6{,}3$ см.

Найти: MK.

а) 13,9 см; б) 14,1 см;
в) 14,9 см; г) 16,4 см.

3) В треугольниках ABC и KPM проведены биссектрисы BO и PE, причем $\Delta ABO = \Delta KPE$. Найдите отрезок EM, если $AC = 9$ см, а EM больше KE на 3,8 см.

а) 6,4 см; б) 5,4 см;
в) 2,6 см; г) 4,8 см.

Ответы к тесту: *1 г); 2 б); 3 а).*

Домашнее задание

1. § 16, 17, вопросы 5–9.

2. Решить задачи: I уровень – № 61, 62, 64, 65 из рабочей тетради; II уровень – №65 из рабочей тетради, № 105 (а), 106 (а), 100 из учебника.

Задача № 61

Через точку O, не лежащую на прямой BC, проведены прямые OM, OK и OA, пересекающие прямую BC. Какой из отрезков OM, OK, OA является перпендикуляром, проведенным из точки O к прямой BC, если:

а) $OM \perp BC$ и $M \in BC$;

б) $K \in BC$ и $\angle BKO \neq 90°$;

в) $OA \perp BC$ и $A \in BC$?

Сделайте чертеж.

Решение:

а) По условию $OM \perp BC$ и $M \notin BC$, поэтому отрезок OM не является перпендикуляром, проведенным из точки O к прямой BC.

б) $K \in BC$ и $\angle BKO \neq 90°$, следовательно, отрезок OK не является перпендикуляром, проведенным из точки O к прямой BC.

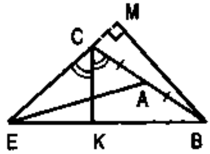


Рис к задаче 64

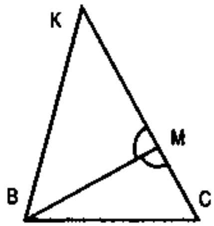


Рис к задаче 65

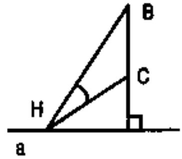


Рис. к задаче 62

в) $OA \perp BC$ и $A \in BC$, поэтому отрезок OA является перпендикуляром, проведенным из точки O к прямой BC.

(*Ответ*: Отрезок OA.)

Задача № 62

Даны: прямая a и три точки B, C, H, такие, что $B \notin a$, $C \notin$ a $H \notin a$, $BC \perp a$. Сделайте чертеж и докажите, что $\angle BHC \neq 90^\circ$.

Доказательство:

1) По условию $B \notin a$, $BC \perp a$, $C \notin a$, поэтому отрезок BC – перпендикуляр, проведенный из точки B к прямой a.

2) Из точки B, не лежащей на прямой a, можно провести к этой прямой только один перпендикуляр, следовательно, $\angle BHC \neq 90^\circ$.

Задача № 64

EA – медиана $\Delta\ BCE$; *CK* – биссектриса $\Delta\ BCE$; *BM* – высота $\Delta\ BCE$.

На рисунке с помощью чертежных инструментов проведите:

а) медиану треугольника BCE из вершины E;

б) биссектрису треугольника из вершины C;

в) высоту треугольника из вершины B.

Задача № 65

На стороне KC треугольника BKC отмечена точка M так, что $\angle BMK = \angle BMC$. Сделайте чертеж. Докажите, что отрезок BM – высота треугольника BKC.

Доказательство: По условию $\angle BMK = \angle BMC$. Но эти углы смежные, следовательно, $\angle BMK = \angle BMC = 90^\circ$. Поэтому отрезок BM – перпендикуляр, проведенный из вершины B треугольника BKC к прямой, содержащей противоположную сторону треугольника, т.е. отрезок BM – высота треугольника BKC.

3. *Дополнительная задача* (рис. 2.45):

Дано: $\angle ADB = \angle CDB$, $AD = DC$.

Доказать: $\angle BAC = \angle BCA$, $BD \perp AC$.

Доказательство: $\Delta\ ADB = \Delta\ CDB$ по двум сторонам и углу между ними ($AD = DC$ по условию задачи, BD – общая сторона, $\angle ADB = \angle CDB$ по условию).

Тогда $AB = CB$, $\angle ABD = \angle CBD$.

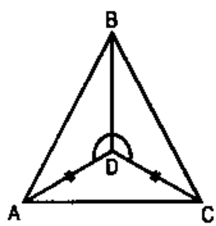


Рис. 2.45

Продолжим BD до пересечения со стороной AC и обозначим точку пересечения BD и AC точкой K, тогда $\Delta ABK = \Delta CBK$ по двум сторонам и углу между ними ($AB = CB$, $\angle ABD = \angle CBD$ по доказанному, BK – общая сторона), следовательно, $\angle BAC = \angle BCA$, $\angle AKB = \angle CKB$. Углы AKB и CKB – смежные, и их сумма равна 180°, а так как $\angle AKB = \angle CKB$, то $\angle AKB = 90°$, $\angle CKB = 90°$, то есть $BK \perp AC$ или $BD \perp AC$.

Урок 16. Свойства равнобедренного треугольника

Цели урока:

1) ввести понятия равнобедренного треугольника, равностороннего треугольника;
2) рассмотреть свойства равнобедренного треугольника и показать их применение на практике.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Проверка домашнего задания. Повторение

1. Теоретический опрос по вопросам 5–9.

2. Проверить решение дополнительной домашней задачи.

(Попросить оформить решение задачи на доске одного из учащихся перед теоретическим опросом.)

3. Решение задач по готовым чертежам:

(Рисунки к задачам необходимо учителю подготовить на доске или на листах А3 до начала урока.)

а) Рис. 2.46.

Дано: BE – медиана ΔABC, $AE = 5$ см, $BC = 7$ см, $AC \perp BF$.

Найти: P_{ABC}.

б) Рис. 2.47.

Дано: BD – высота и медиана ΔABC, $\angle BCD = 40°30'$.

Найти: $\angle BAD$.

4. Практическое задание (самостоятельно с последующим обсуждением).

– Начертите отрезок, являющийся общей высотой для всех треугольников, изображенных на рисунке (рис. 2.48).

Рисунок 2.48 подготовить на доске, можно несколько. При обсуждении учащиеся выходят к доске и чертят предполагаемый отрезок. Далее

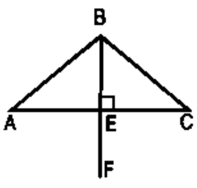


Рис. 2.46

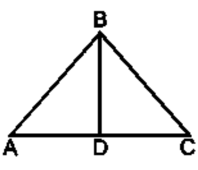


Рис. 2.47

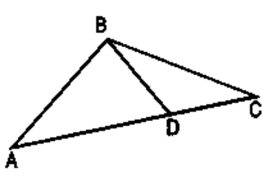


Рис 2.48

по нескольким чертежам учащимся предлагается выбрать наиболее верное решение задачи.

III. Изучение нового материала

1. Определение: треугольник, две стороны которого равны, называется ***равнобедренным***. Равные стороны называются ***боковыми сторонами***, а третья сторона – ***основанием*** равнобедренного треугольника.

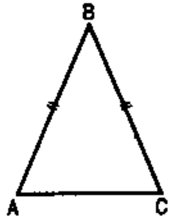


Рис. 2.49

На доске и в тетрадях учащихся – рисунок (рис. 2.49) и запись:

ΔABC – равнобедренный, так как $AB = BC$; AB, BC – боковые стороны равнобедренного ΔABC; AB – основание равнобедренного ΔABC; $\angle A$, $\angle C$ – углы при основании равнобедренного ΔABC; $\angle B$ – угол при вершине равнобедренного ΔABC.

Определение: треугольник, все стороны которого равны, называется ***равносторонним***.

2. Докажем свойство углов при основании равнобедренного треугольника.

Теорема:

В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

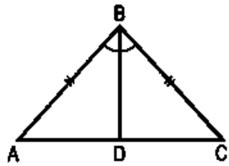


Рис. 2.50

Дано: ΔABC, $AB = BC$.

Доказать: $\angle A = \angle C$.

Доказательство (см. рис. 2.50): Проведем биссектрису из вершины B к основанию AC.

(Далее можно предложить учащимся продолжить доказательство самостоятельно, заслушать варианты доказательств, обсудить и записать в кратком виде ход доказательства.)

3. Свойство биссектрисы, проведенной к основанию равнобедренного треугольника, можно предложить учащимся получить самостоятельно, поставив перед ними проблему: «Как известно, биссектриса треугольника делит его угол пополам. Но в равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, обладает еще одним очень важным свойством. В чем заключается это свойство?»

Работа проводится в группах по 3–4 человека с последующим обсуждением этого свойства с доказательством. При обсуждении важно затронуть вопросы:

– Каждая ли биссектриса равнобедренного треугольника является его высотой и медианой?
– Является ли высота равнобедренного треугольника его биссектрисой и медианой? Если да, то какая из трех?

IV. Самостоятельная работа творческого характера

Вариант I

Исследуйте медианы равнобедренного треугольника и перечислите все их особенности и свойства.

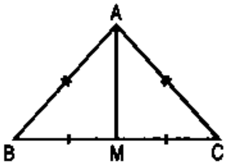


Рис. 2.51

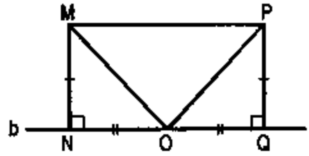


Рис. 2.52

Вариант II

Исследуйте высоты равнобедренного треугольника и перечислите все их особенности и свойства.

Далее идет обсуждение свойств медианы и высоты равнобедренного треугольника.

V. Закрепление изученного материала

1. Решить устно задачи № 66, 67 из рабочей тетради.
2. Решение задач № 109 и 113 у доски и в тетрадях учащихся:

Задача № 109

Рис. 2.51.

Решение: ΔABC – равнобедренный с основанием BC, значит, $AB = AC$. AM – медиана, тогда $BM = MC$.

$P_{ABC} = AB + AC + BC = 2\,AB + (BM + MC) = 2\,AB + 2\,BM = 2(AB + BM) =$ $= 32$ см, тогда $AB + BM = 16$ см.

$P_{ABM} = AB + BM + AM = 16$ см $+ AM = 24$ см, тогда $AM = 8$ см. (*Ответ*: $AM = 8$ см.)

Наводящие вопросы:

1) Что называют периметром треугольника?
2) Чему равен полупериметр треугольника ABC?
3) Можно ли вычислить длину стороны AM треугольника ABM, если его периметр равен 24 см, а полупериметр треугольника ABC 16 см?

Задача № 113

Рис. 2.52.

а) $\Delta MON = \Delta POQ$ по двум сторонам и углу между ними ($MN = PQ$ по условию задачи, $NO = QO$, так как O – середина NQ, $\angle MNO =$ $= \angle PQO = 90°$, так как $MN \perp b$, $PQ \perp b$), тогда $MO = PO$.

ΔMOP – равнобедренный с основанием MP, так как $MO = PO$, тогда $\angle OMP = \angle OPM$ как углы при основании равнобедренного треугольника.

б) $\angle NOM + \angle MOP + \angle POQ = 180°$, $\angle MOP = 105°$, тогда $\angle NOM + \angle POQ = 180° - 105° = 75°$. $\angle NOM = \angle POQ$ из равенства треугольников MON и POQ, тогда $\angle NOM = 37°30'$. (*Ответ*: $\angle NOM = 37°30'$.)

Наводящие вопросы:

а) 1) Что вы можете сказать о треугольниках MNO и PQO? А о треугольнике MOP?

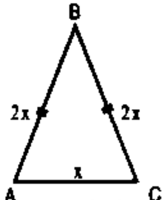


Рис. 2.53

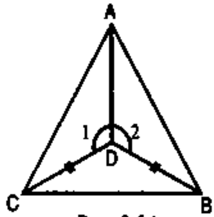


Рис. 2.54

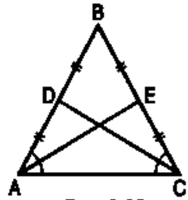


Рис. 2.55

2) Что нам известно об углах равнобедренного треугольника?

б) 1) Чему равна сумма углов NOM и QOP?

2) Чему равен каждый из этих углов? Почему?

3. Самостоятельное решение задач № 107, 111, 114

(Для одной задачи записать полное решение, для двух других – краткую запись решения. Тетради в конце урока можно собрать на проверку у части учащихся.)

Задача № 107

Рис. 2.53.

Решение (краткая запись): $P = 50$ см; $x + 2x + 2x = 50$ см; $x = 10$ см; $AB = BC = 20$ см, $AC = 10$ см.

Задача № 111

Рис. 2.54.

Решение (краткая запись): $\Delta\, ACD = \Delta\, ABD$ ($CD = DB$, AD – общая сторона, $\angle 2 = \angle 1$). Тогда $AC = AB$, $\Delta\, ABC$ – равнобедренный.

Задача № 114

Рис. 2.55.

Решение (краткая запись): $\Delta\, ADC = \Delta\, CEA$ (AC – общая сторона, $AD = CE = 1/2AB = 1/2BC$, $\angle DAC = \angle ECA$). Тогда $CD = AE$.

Домашнее задание

1. § 18, вопросы 10–13.
2. Решить задачи № 108, 110, 112.

Урок 17. Решение задач по теме «Равнобедренный треугольник»

Цели урока:

1) закрепить теоретические знания по изучаемой теме;
2) совершенствовать навыки доказательства теорем, навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

Теоретический опрос

Доказать свойства равнобедренного треугольника (двум учащимся подготовиться у доски: первый ученик – свойства углов при основании равнобедренного треугольника, второй ученик – свойство биссектрисы, проведенной к основанию равнобедренного треугольника).

Теоретический тест

Тест (с последующей самопроверкой) проводится, пока у доски идет подготовка к доказательству теорем.

Ответы учащиеся записывают на двух листочках, один из них сдают на проверку учителю, по другому – проверяют правильность своих ответов. Ответы к тесту учитель записывает на доске после того, как учащиеся сдали листочки. После проверки ответов теста заслушивают учащихся, подготовивших доказательства свойств равнобедренного треугольника.

1. Медиана в равнобедренном треугольнике является его биссектрисой и высотой. Это утверждение:
 а) всегда верно;
 б) может быть верно;
 в) всегда неверно.
2. Если треугольник равносторонний, то:
 а) он равнобедренный;
 б) все его углы равны;
 в) любая его высота является биссектрисой и медианой.
3. В каком треугольнике только одна его высота делит треугольник на два равных треугольника?
 а) в любом;
 б) в равнобедренном;
 в) в равностороннем.
4. Биссектриса в равностороннем треугольнике является медианой и высотой. Это утверждение:
 а) всегда верно;
 б) может быть верно;
 в) всегда неверно.
5. Если треугольник равнобедренный, то:
 а) он равносторонний;
 б) любая его медиана является биссектрисой и высотой;
 в) ответы а) и б) неверны.
6. В каком треугольнике любая его высота делит треугольник на два равных треугольника?
 а) в любом;
 б) в равнобедренном;
 в) в равностороннем.

Ответы к тесту: *1 б); 2 а), б), в); 3 б); 4 а); 5 в); 6 в).*

Решение задач

1. Решить задачи № 68 и № 69 из рабочей тетради.

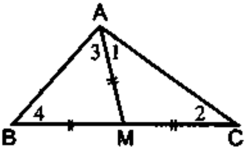


Рис. 2.56

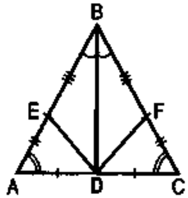


Рис. 2.57

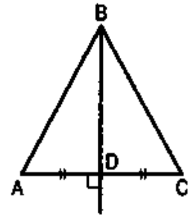


Рис. 2 58

2. Решаются задачи №115, 120 (дать учащимся 2–3 минуты на обдумывание, затем обсудить).

Задача № 115

Решение (рис. 2.56): $\angle 1 = \angle 2$ как углы при основании равнобедренного треугольника *AMC*. $\angle 3 = \angle 4$ как углы при основании равнобедренного треугольника *ABM*, тогда $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$.

Вопросы для обсуждения:

1) Медиана *AM* разбивает треугольник *ABC* на два треугольника. Что вы можете сказать о полученных треугольниках?

2) Какой из углов треугольника *ABC* равен сумме двух других его углов? Почему?

Задача № 120

Решение (см. рис. 2.57):

а) $\Delta BDE = \Delta BDF$ (*BD* – общая сторона, $BE = BF$, $\angle EBD = \angle FBD$, так как *BD* – медиана и биссектриса).

б) $\Delta ADE = \Delta CDF$ ($AD = CD$, $AE = CF$ по условию задачи, $\angle A = \angle C$ как углы при основании равнобедренного треугольника).

Вопросы для обсуждения:

1) Когда один треугольник равен второму?

2) Можно ли доказать равенство треугольников *BDE* и *BDF* по определению? Почему? А по первому признаку равенства треугольников? Докажи.

3) Докажите равенство ΔADE и ΔCDF.

III. Самостоятельная работа

(На доске учитель записывает только задания. Листочки с краткими решениями и указаниями к задачам раздаются во время проведения работы над ошибками. Писать на листочках через копировальную бумагу.)

I уровень

Вариант I

1. *Дано*: $AD = CD$, $AC \perp BD$ (рис. 2.58).

Доказать: ΔABC – равнобедренный.

Доказательство (см. рис. 2.59): $\Delta ABD = \Delta CBD$ ($AD = CD$, *BD* – общая сторона, $\angle ADB = 90° = \angle ADB$), тогда $AB = BC$ и ΔABC – равнобедренный.

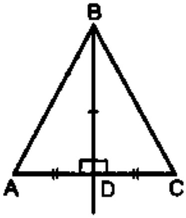


Рис. 2.59

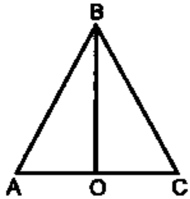


Рис. 2.60

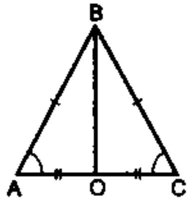


Рис. 2.61

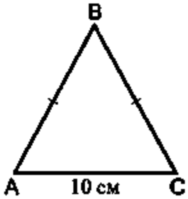


Рис. 2.62

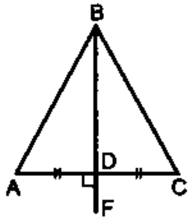


Рис. 2.63

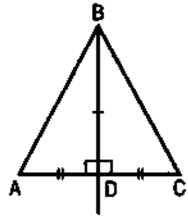


Рис. 2.64

2. *Дано*: Δ *ABC* – равнобедренный, *AO* = *CO* (рис. 2.60).
Доказать: Δ *ABO* = Δ *CBO*.

Доказательство (см. рис. 2.61): *AB* = *BC*, $\angle A = \angle C$ (объясни), тогда Δ *ABO* = Δ *CBO* (докажи).

3. Периметр равнобедренного треугольника равен 36 см, основание – 10 см. Найдите боковую сторону этого треугольника.

Решение (см. рис. 2.62): *AB* = *BC* (объясни), $P_{ABC} = AB + BC + AC = 36$ см. $AB + BC = 36 - 10 = 26$ см. *AB* = *BC* = 13 см (почему?). (*Ответ*: 13 см.)

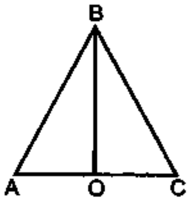


Рис. 2.65

Вариант II

1. *Дано*: *D* – середина *AC*, $\angle ADF = 90°$ (рис. 2.63).
Доказать: Δ *ABC* – равнобедренный.

Доказательство (см. рис. 2.64): $\Delta ABD = \Delta CBD$ (*AD* = *DC*, *BD* – общая сторона, $\angle ADB = \angle CDB = 90°$), тогда *AB* = *BC* и Δ *ABC* – равнобедренный.

2. *Дано*: Δ *ABC* – равнобедренный, *BO* – биссектриса (рис. 2.65).
Доказать: Δ *ABO* = Δ *CBO*.

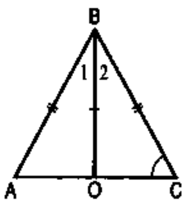


Рис 2 66

Доказательство (см. рис. 2.66): *AB* = *BC*, $\angle 1 = \angle 2$ (объясни), тогда Δ *ABO* = Δ *CBO* (докажи).

3. Периметр равнобедренного треугольника равен 48 см, боковая сторона – 15 см. Найдите основание этого треугольника.

Решение (см. рис. 2.67): *AB* = *BC* = 15 см (объясни). $P_{ABC} = AB + BC + AC = 48$ см. $AC = 48 - 15 \cdot 2 = 18$ см (почему?). (*Ответ*: 18 см.)

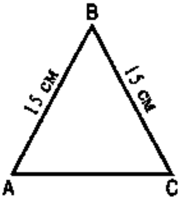


Рис. 2.67

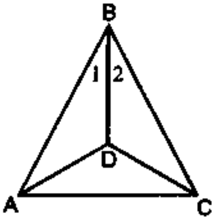


Рис. 2.68

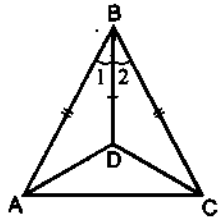


Рис. 2.69

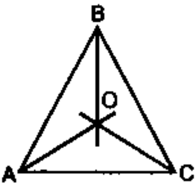


Рис. 2.70

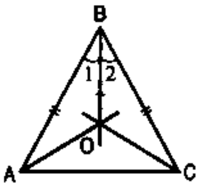


Рис. 2.71

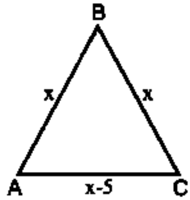


Рис. 2.72

II уровень

Вариант I

1. *Дано*: $AB = BC$, $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 2.68).

Доказать: $\Delta\ ADC$ – равнобедренный.

Доказательство (см. рис. 2.69): $\Delta\ ABD = \Delta\ CBD$ (докажи). $AD = DC$ (почему?). Тогда $\Delta\ ADC$ – ...

2. *Дано*: $\Delta\ ABC$ – равнобедренный с основанием AC. AO и CO – высоты в $\Delta\ ABC$ (рис. 2.70).

Доказать: $\Delta\ AOC$ – равнобедренный.

Доказательство (см. рис. 2.71): AO и CO – высоты, тогда BO – также высота (объясни).

Так как BO – высота, проведенная к ..., то BO – ..., тогда $\angle 1 = \angle 2$.

$\Delta\ ABO = \Delta\ CBO$ (докажи), значит, $\Delta\ AOC$ – ....

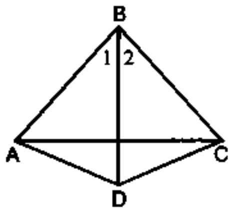


Рис 2.73

3. Периметр равнобедренного треугольника равен 37 см. Основание меньше боковой стороны на 5 см. Найдите стороны этого треугольника.

Решение (см. рис. 2.72): $x + x + x - 5 = 37$ (почему?). (*Ответ*: 14 см, 14 см, 9 см.)

Вариант II

1. *Дано*: $AB = BC$, $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 2.73).

Доказать: $\Delta\ ADC$ – равнобедренный.

Доказательство (см. рис. 2.74): $\Delta\ ABD = \Delta\ CBD$ (докажи).

$AD = CD$ (почему?).

Тогда $\Delta\ ADC$ – ....

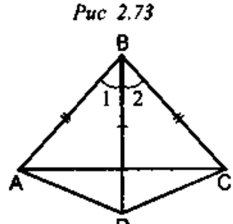


Рис 2 74

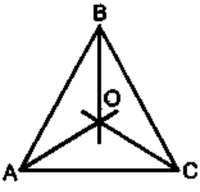


Рис. 2.75

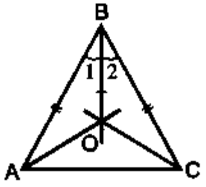


Рис. 2.76

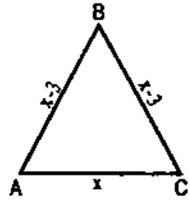


Рис. 2.77

2. *Дано*: Δ *ABC* – равнобедренный с основанием *AC*, *AO* и *CO* – медианы в Δ *ABC* (рис. 2.75).

Доказать: Δ *AOC* – равнобедренный.

Доказательство (см. рис. 2.76): *AO* и *CO* – медианы, тогда *BO* – также медиана (объясни).

Так как *BO* – медиана, проведенная к ..., то *BO* – ..., тогда $\angle 1 = \angle 2$.

Δ *ABO* = Δ *CBO* (докажи), значит, ..., Δ *AOC* – ....

3. Периметр равнобедренного треугольника равен 45 см. Боковая сторона меньше основания на 3 см. Найдите стороны треугольника.

Решение (см. рис. 2.77): $x - 3 + x - 3 + x = 45$ (почему?). (*Ответ*: 17 см, 14 см, 14 см.)

III уровень

Вариант I

1. *Дано*: Δ *ADC* – равнобедренный, $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 2.78).

Доказать: Δ *ABC* – равнобедренный.

Доказательство (см. рис. 2.79): *AD* = *DC* (почему?). Δ *ABD* = Δ *CBD* по .... Δ *ABC* – ....

2. *Дано*: Δ *MBN* – равнобедренный с основанием *MN*, *AN* = *CM* (рис. 2.80).

Доказать: Δ *ABC* – равнобедренный.

Доказательство (рис. 2.81): *MB* = *BN*, *AM* = *CN* (объясни).

$\angle 1 = \angle 2$, тогда $\angle 3 = \angle 4$ (объясни).

Δ *ABM* = Δ *CBN* по ..., тогда Δ *ABC* – ....

3. Сумма двух сторон равнобедренного треугольника равна 26 см, а периметр равен 36 см. Какими могут быть стороны этого треугольника?

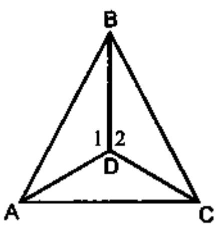


Рис. 2 78

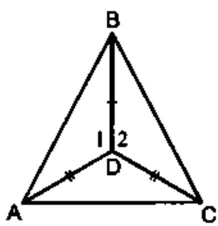


Рис. 2.79

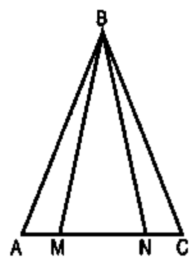


Рис. 2.80

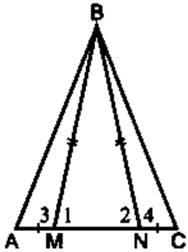


Рис. 2.81

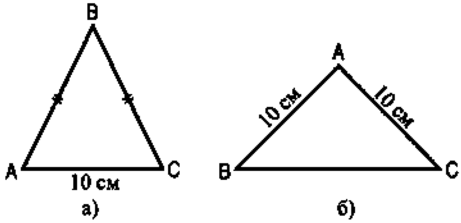


Рис. 2.82

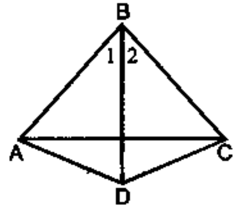


Рис. 2.83

Решение: $AB + BC = 26$ см, тогда $AC = 10$ см (объясни).

Возможны два случая (рис. 2.82):

а) $AB = BC = 13$ см.

б) $BC = 16$ см.

(***Ответ***: 13 см, 13 см, 10 см или 10 см, 10 см, 16 см.)

Вариант II

1. *Дано*: $\Delta\, ABC$ – равнобедренный, $1 = \angle 2$ (рис. 2.83).

Доказать: $\Delta\, ADC$ – равнобедренный.

Доказательство (см. рис. 2.84): $AB = BC$ (почему?).

$\Delta\, ABD = \Delta\, CBD$ по .... $\Delta\, ADC$ – ....

2. *Дано*: $\Delta\, ABC$ – равнобедренный с основанием AC, $AE = DC$ (рис. 2.85).

Доказать: $\Delta\, DBE$ – равнобедренный.

Доказательство (см. рис. 2.86): $AB = BC$, $AD = CE$, $\angle 1 = \angle 2$ (объясни).

Тогда Δ ... = Δ ... по ..., значит, $\Delta\, DBE$ – ....

3. Одна из сторон равнобедренного треугольника равна 8 см, а периметр равен 26 см. Какими могут быть другие стороны этого треугольника?

Решение: $AB = 8$ см, тогда $BC + AC = 18$ см (объясни).

Возможны два случая (см. рис. 2.87):

а) $AC = 10$ см.

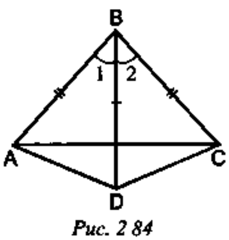


Рис. 2 84

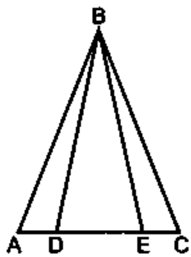


Рис. 2.85

Рис. 2.86

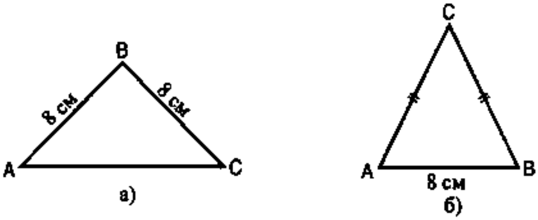


Рис. 2.87

б) $AC = BC = 9$ см.

(*Ответ*: 8 см, 8 см, 10 см или 9 см, 9 см, 8 см.)

IV. Самопроверка и работа над ошибками

Один из листочков учащиеся сдают на проверку учителю, а по другому проводят самопроверку и работу над ошибками, используя готовые решения и указания к решению задач.

Домашнее задание

Решить задачи № 116, 117, 118, 119.

Урок 18. Второй признак равенства треугольников

Цели урока:

1) доказать второй признак равенства треугольников;
2) выработать у учащихся навыки использования второго признака равенства треугольников при решении задач.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Проверка домашнего задания. Повторение

1. Проверка домашнего задания № 118, 119.

(Можно заранее попросить учащихся подготовить домашнее задание у доски, или использовать проектор.)

Задача № 118

Дано: ΔABC – равнобедренный, BC – основание; $M, N \in BC$; $BM = CN$.

Доказать:

а) $\Delta BAM = \Delta CAN$;

б) ΔAMN – равнобедренный.

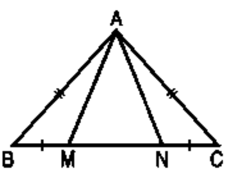


Рис. 2.88

Доказательство (см. рис. 2.88):

а) Рассмотрим треугольники BAM и CAN. У них: 1) $AB = AC$, так как по условию задачи ΔABC – равнобедренный с основанием BC; 2) $BM = CN$ по условию задачи; 3) $\angle ABM = \angle CAN$ как углы при основании равнобедренного треугольника.

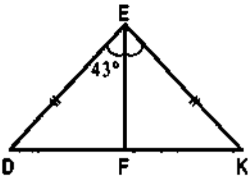


Рис. 2.89

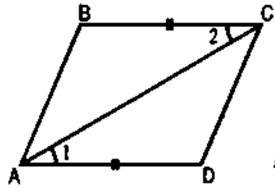


Рис. 2.90

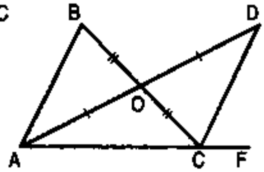


Рис. 2.91

Отсюда $\Delta\ BAM = \Delta\ CAN$ по двум сторонам и углу между ними.

б) По доказанному в пункте а) $\Delta\ BAM = \Delta\ CAN$. В равных треугольниках соответственные стороны равны, то есть $AM = AN$. Получили, что в $\Delta\ AMN$ две стороны равны, т.е. $\Delta\ AMN$ – равнобедренный.

Задача № 119

Дано: $\Delta\ DEK$ – равнобедренный с основанием DK, $DK = 16$ см, EF – биссектриса, $\angle DEF = 43°$.

Найти: KF, $\angle DEK$, $\angle EFD$.

Решение (см. рис. 2.89): EF – биссектриса, проведенная из вершины равнобедренного треугольника к его основанию, и по свойству равнобедренного треугольника она является медианой и высотой. Если EF – медиана, то $DF = FK$, значит, $KF = \frac{1}{2}DK = \frac{16}{2} = 8$ (см). Если EF – высота, то $EF \perp DK$, значит, $\angle EFD = 90°$. Если EF – биссектриса, то $\angle DEK = 2 \cdot \angle DEF = 2 \cdot 43° = 86°$. (*Ответ:* $KF = 8$ см, $\angle DEK = 86°$, $\angle EFD = 90°$.)

2. Решение задач по готовым чертежам с целью повторения первого признака равенства треугольников.

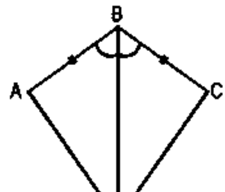


Рис. 2.92

Рисунки к задачам можно подготовить заранее на планшетах.

а) Рис. 2.90.

Дано: $AB = 15$ см, $AD = 2$ дм.

Найти: P_{ABCD}.

б) Рис. 2.91.

Дано: $\angle ACB : \angle BCD : \angle DCF = 2 : 3 : 4$.

Найти: $\angle ABC$.

в) Рис. 2.92.

Доказать: $AC \perp BD$, DB – биссектриса $\angle ADC$.

г) Рис. 2.93.

Дано: $DC = AC$, $\angle ACB = 55°$.

Найти: $\angle ECM$.

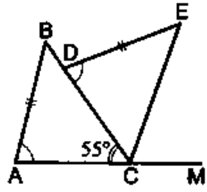


Рис. 2.93

3. Практическое задание с целью подготовки учащихся к восприятию нового материала (задание учащиеся смогут выполнить самостоятельно, так

как такие задачи встречались в курсе математики за 6 класс. Одного из учащихся можно попросить выполнить задание у доски, а затем проверить правильность решения задачи всем классом):

Начертите $\Delta\,MNK$ – такой, что $\Delta\,MNK = \Delta\,ABC$, если известно, что $AB = 4$ см, $\angle A = 54°$, $\angle B = 46°$.

Построение:

1) отложить отрезок $MN = 4$ см, так как $\Delta\,MNK = \Delta\,ABC$, а значит, $MN = AB$;

2) построить $\angle NMP = 54°$;

3) построить $\angle MNE = 46°$ по ту же сторону от прямой MN, что и $\angle NMP$;

4) $MP \cap NE = K$, $\Delta\,MNK$ – искомый.

III. Изучение нового материала

(Идет обсуждение практического задания. Учитель задает вопросы, учащиеся отвечают на них.)

– Будут ли равны $\Delta\,ABC$ и $\Delta\,MNK$, если $AB = MN$, $\angle A = \angle M$, $\angle B = \angle N$? (Да, $\Delta\,ABC = \Delta\,MNK$.)

– Докажите равенство треугольников ABC и MNK.

Дано: $\Delta\,ABC$, $\Delta\,MNK$, $AB = MN$, $\angle A = \angle M$, $\angle B = \angle N$.

Доказать: $\Delta\,ABC = \Delta\,MNK$.

Доказательство: Наложим $\Delta\,ABC$ на $\Delta\,MNK$ так, чтобы AB совместилось с MN, а вершины C и K лежали по одну сторону от MN.

Так как по условию задачи $AB = MN$, то вершина A совместится с вершиной M, а вершина B – с вершиной N.

Луч AC совместится с лучом MK, так как $\angle A = \angle M$, а луч BC совместится с лучом NK, так как $\angle B = \angle N$.

Точка пересечения лучей AC и BC совместится с точкой пересечения лучей MK и NK, то есть точка C совместится с точкой K.

Получили, что треугольники ABC и MNK полностью совместились, а это значит, что $\Delta\,ABC = \Delta\,MNK$.

– Итак, мы только что доказали ***второй признак равенства треугольников***. Сформулируйте его и дайте ему название.

Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Второй признак равенства треугольников можно назвать признаком равенства треугольников по стороне и прилежащим к ней углам.

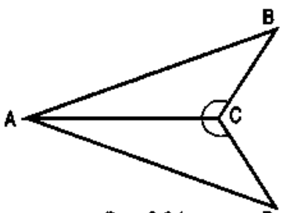


Рис. 2 94

IV. Закрепление изученного материала

1. Решение задач по готовым чертежам (рисунки должны быть заранее подготовлены, в тетрадях кратко записать доказательство).

1) Рис. 2.94.

Дано: $\angle ACB = \angle ACD$, AC – биссектриса $\angle BAD$.

Доказать: $\Delta\,ABC = \Delta\,ADC$.

2) Рис. 2.95.

Дано: $MO = ON$, $\angle M = \angle N$.

Доказать: $\Delta MOK = \Delta NOP$.

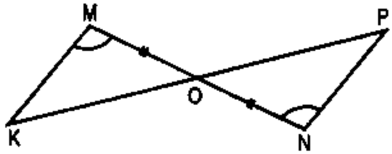


Рис. 2.95

3) Рис. 2.96.

Дано: $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$.

Доказать: $\Delta SEF = \Delta FKS$.

4) Рис. 2.97.

Дано: $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$.

Доказать: $\Delta ABC = \Delta DCB$, $\Delta ABO = \Delta DCO$.

2. Самостоятельное решение задач № 121, 126, 127. Наиболее подготовленные учащиеся смогут их решить самостоятельно, некоторым учащимся потребуется индивидуальная помощь.

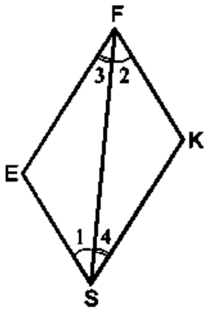


Рис. 2.96

Задача № 126

Дано: $\angle DAB = \angle CBA$, $\angle CAB = \angle DBA$, $AC = 13$ см (рис. 2.98).

Найти: BD.

Решение: Рассмотрим треугольники DBA и CAB. У них:

1) $\angle DAB = \angle CBA$ по условию задачи;
2) $\angle CAB = \angle DBA$ по условию задачи;
3) AB – общая сторона. $\Delta DBA = \Delta CBA$ по стороне и двум прилежащим к ней углам.

Поэтому $BD = AC$ как соответственные стороны равных треугольников. $AC = 13$ см, значит, $BD = 13$ см. (*Ответ*: $BD = 13$ см.)

Задача № 127

Дано: ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$, $D \in AB$, $D_1 \in A_1B_1$, $\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$ (рис. 2.99).

Доказать: $\Delta BCD = \Delta B_1C_1D_1$.

Доказательство:

1) $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по двум сторонам и углу между ними ($AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$ по условию задачи).

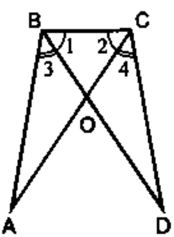


Рис 2.97

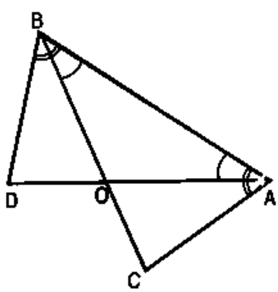


Рис 2.98

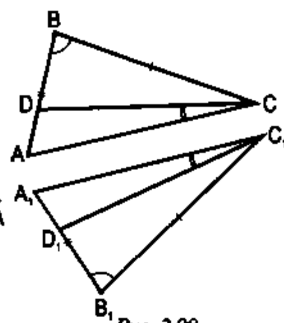


Рис. 2.99

2) $\angle BCD = \angle B_1C_1D_1$, так как $\angle BCD = \angle BCA - \angle DCA$, $\angle B_1C_1D_1 = \angle B_1C_1A_1 - \angle D_1C_1A_1$, а $\angle BCA = \angle B_1C_1A_1$ из равенства треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, $\angle DCA = \angle D_1C_1A_1$ по условию задачи.

3) $\Delta BCD = \Delta B_1C_1D_1$ по стороне и прилежащим к ней углам ($BC = B_1C_1$ по условию задачи, $\angle B = \angle B_1$ по условию задачи, $\angle DCA = \angle D_1C_1A_1$ по доказанному в пункте 2).

Домашнее задание

1. § 19, ответить на вопрос 14.
2. Решить задачи № 122–125.

Урок 19. Решение задач на применение второго признака равенства треугольников

Цель урока:
совершенствование навыков решения задач на применение второго признака равенства треугольников.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Повторение. Проверка домашнего задания

1. Доказать второй признак равенства треугольников.

(К доске вызывается один из учащихся, ответ его заслушивается всем классом перед работой в группах.)

2. а) Фронтальная работа с классом – тестовые задания обучающего характера с последующей самопроверкой. Самопроверку можно провести следующим образом: учитель повторяет вопрос и просит 2–3 учащихся назвать свои ответы, далее идет выбор правильного ответа с обоснованием.

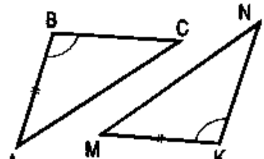


Рис. 2.100

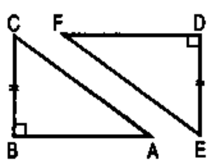


Рис 2.101

1) Рис. 2.100.

Для доказательства равенства треугольников ABC и MNK достаточно доказать, что:

а) $AC = MN$; б) $\angle C = \angle N$;

в) $BC = NK$.

2) Рис. 2.101.

Для доказательства равенства треугольников ABC и EDF достаточно доказать, что:

а) $AC = FE$; б) $\angle C = \angle E$;

в) $\angle A = \angle F$.

3) Чтобы доказать равенство равносторонних треугольников ABC и MNK, достаточно доказать, что:

а) $\angle A = \angle M$; б) $AB = MN$;

в) $P_{ABC} = P_{MNK}$.

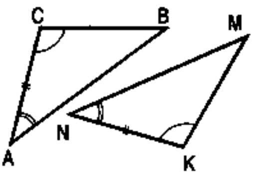


Рис 2.102

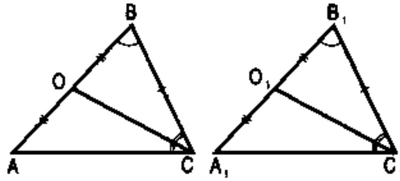


Рис. 2.103

4) Чтобы доказать равенство двух равнобедренных треугольников TOS и DEF с основаниями TS и DF соответственно, достаточно доказать, что:

а) $\angle O = \angle E$; б) $TS = DF$ и $\angle T = \angle D$;

в) $TS = DF$.

5) Рис. 2.102. Выберите верное утверждение:

а) $BC = KN$; б) $AB = KN$;

в) $BC = NM$.

Ответы к тестовым заданиям: *1 в); 2 б); 3 б); 4 б); 5 а).*

б) Индивидуальная работа в рабочих тетрадях (задание для слабо подготовленных учащихся): решить задачи № 71, 72, тетради сдать до начала работы в группах на проверку учителю.

3. Работа в группах.

Учащиеся распределяются в группы по 3–4 человека и решают задачи № 130, 131, 133, выполняя рисунок к задаче и записывая краткое решение.

Учитель контролирует правильность решения задач в группах, при необходимости консультирует как целые группы, так и отдельных учащихся.

Возможное оформление решения задач:

Задача № 130

Решение (см. рис. 2.103):

1) $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по стороне и прилежащим к ней углам ($BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$).

2) $BO = OA = B_1O_1 = O_1A_1$, так как CO и C_1O_1 – медианы равных треугольников.

3) $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, так как $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. $AO = A_1O_1$, значит, $\Delta ACO = \Delta A_1C_1O_1$ по двум сторонам и углу между ними.

Задача № 131

Решение (см. рис. 2.104):

1) $\Delta EFK = \Delta NPM$ по двум сторонам и углу между ними ($EF = NP$, $DF = MP$, $\angle F = \angle P$).

2) $\angle 1 = \angle 2$, так как EO и NK – биссектрисы соответственных углов равных треугольников.

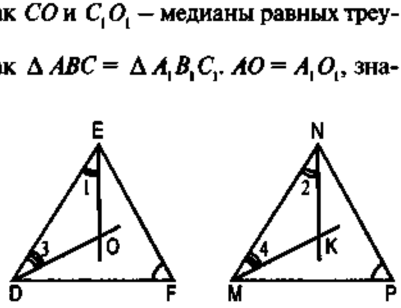


Рис. 2.104

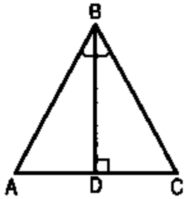


Рис. 2.105

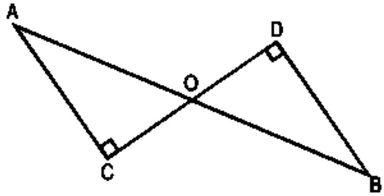


Рис. 2.106

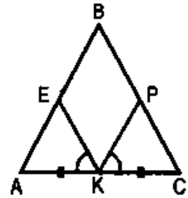


Рис. 2.107

3) $\angle 3 = \angle 4$, так как DO и MK – биссектрисы соответственных углов равных треугольников.

4) $\Delta DOE = \Delta MKN$ по стороне и прилежащим к ней углам ($DE = MN$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$).

Задача № 133

Решение (см. рис. 2.105):

BD – биссектриса и высота ΔABC.

$\Delta ABD = \Delta CBD$ по стороне и прилежащим к ней углам (BD – общая сторона, $\angle ABD = \angle CBD$, $\angle ADB = \angle CDB$).

$AB = BC$ как соответственные стороны равных треугольников.

Так как $AB = BC$, то ΔABC – равнобедренный.

III. Самостоятельная работа

(На доске записываются только условия задач. Решения задач на листочках можно вывесить в конце урока в кабинете до следующего урока геометрии в этом классе.)

I уровень

Вариант I

1. Рис. 2.106.

Дано: $CO = OD$, $\angle C = 90°$, $D = 90°$.

Доказать: O – середина AB.

2. Рис. 2.107.

Дано: $AB = BC$, $AK = KC$, $\angle AKE = \angle PKC$.

Доказать: $\Delta AKE = \Delta CKP$.

Доказательство: Так как $AB = BC$, то ΔABC – равнобедренный с основанием AC.

$\angle A = \angle C$ как углы при основании равнобедренного треугольника. $\Delta AKE = \Delta CKP$ по стороне и прилежащим к ней углам ($AK = KC$, $\angle A = \angle C$, $\angle EKA = \angle PKC$).

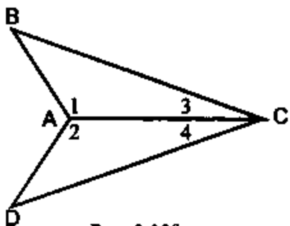


Рис 2 108

Вариант II

1. Рис. 2.108.

Дано: $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$.

Доказать: $AB = AD$.

2. Рис. 2.109.

Дано: $AB = BC$, $MA = PC$, $\angle AMO = \angle OPC$.

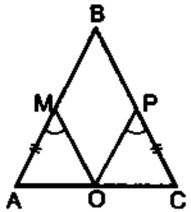


Рис. 2.109

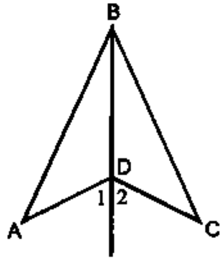


Рис. 2.110

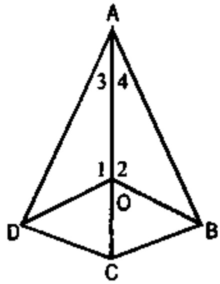


Рис. 2.111

Доказать: $\Delta AMO = \Delta OPC$.

Доказательство: $AB = BC$, поэтому ΔABC – равнобедренный с основанием AC, и в ΔABC углы при основании равны ($\angle A = \angle C$). $\Delta AMO =$ $= \Delta CPO$ по стороне и прилежащим к ней углам ($MA = PC$, $\angle A = \angle C$, $\angle AMO = \angle OPC$).

II уровень

Вариант I

1. Рис. 2.110.

Дано: BD – биссектриса $\angle ABC$, $\angle 1 = \angle 2$.

Доказать: $AB = CB$.

Доказательство: BD – биссектриса ΔABC, поэтому $\angle ABD = \angle CBD$. $\angle 1 = \angle 2$, следовательно, $\angle ADB = \angle CDB$ (два угла равны, если смежные с ними углы равны).

$\Delta ABD = \Delta CBD$ по стороне и прилежащим к ней углам (BD – общая сторона, $\angle ABD = \angle CBD$, $\angle ADB = \angle CDB$), следовательно, $AB = CD$ как соответствующие стороны равных треугольников.

2. Рис. 2.111.

Дано: $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$.

Доказать: $\Delta ABC = \Delta ADC$.

Доказательство: $\Delta ADO = \Delta ABO$ по стороне и прилежащим к ней углам (AO – общая сторона, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 =$ $= \angle 4$). $\Delta ABC = \Delta ADC$ по двум сторонам и углу между ними ($AD = AB$ как соответствующие стороны равных треугольников, AC – общая сторона, $\angle 3 = \angle 4$ по условию задачи).

Вариант II

1. Рис. 2.112.

Дано: O – середина AB, $\angle 1 = \angle 2$.

Доказать: $\angle C = \angle D$.

Доказательство: O – середина AB, значит, $AO = BO$.

$\Delta ACO = \Delta DBO$ по стороне и прилежащим к ней углам ($AO = BO$, $\angle AOC = \angle BOD$

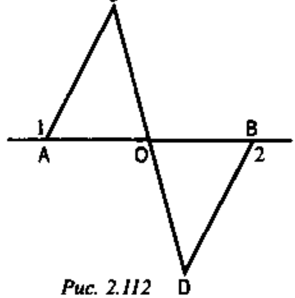


Рис. 2.112

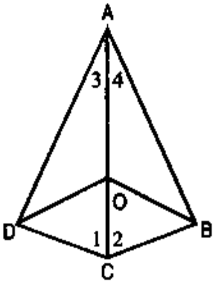


Рис. 2.113

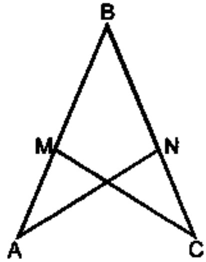


Рис. 2.114

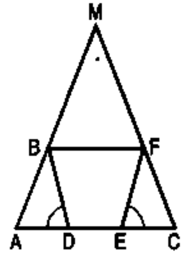


Рис. 2.115

как вертикальные, $\angle CAO = \angle DBO$, так как смежные им углы $\angle 1$ и $\angle 2$ равны).

Из равенства треугольников ACO и DBO следует равенство соответствующих углов C и D.

2. Рис. 2.113.

Дано: $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$.

Доказать: $\Delta ABO = \Delta ADO$.

Доказательство: $\Delta ADC = \Delta ABC$ по стороне и прилежащим к ней углам (AC – общая сторона, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ по условию задачи).

$\Delta ADO = \Delta ABO$ по двум сторонам и углу между ними (AO – общая сторона, $AD = AB$ как соответствующие стороны равных треугольников ADC и ABC).

III уровень

Вариант I

1. Рис. 2.114.

Дано: $AB = CB$, $\angle A = \angle C$.

Доказать: $AM = CN$.

Доказательство: $\Delta ABN = \Delta CBM$ по стороне и прилежащим к ней углам ($AB = CB$ по условию задачи, $\angle A = \angle C$ по условию задачи, $\angle B$ – общий).

Так как $\Delta ABN = \Delta CBM$, то $BM = BN$ как соответствующие стороны равных треугольников.

Так как $BM = BN$ и $AB = AC$, то $AM = CN$.

2. Рис. 2.115.

Дано: $AM = MC$, $AE = DC$, $\angle BDA = \angle FEC$.

Доказать: $AB = FC$.

Доказательство: $AM = MC$, следовательно, ΔAMC – равнобедренный с основанием AC, а значит, $\angle A = \angle C$. $AD = CE$, так как $AD = AE - DE$, $CE = CD - DE$, а $AE = DC$.

$\Delta ABD = \Delta CFE$ по стороне и прилежащим к ней углам ($AD = CE$, $\angle A = \angle C$, $\angle BDA = \angle FEC$).

Так как $\Delta ABD = \Delta CFE$, то $AB = FC$.

Вариант II

1. Рис. 2.116.

Дано: $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$.

Доказать: $AB = DC$.

Доказательство: $\Delta\, ABD = \Delta\, DCA$ по стороне и прилежащим к ней углам (AD – общая сторона, $\angle BAD = \angle CDA$, так как $\angle BAD = \angle 1 + \angle 3$, $\angle CDA = \angle 2 + \angle 4$, а $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ по условию задачи; $\angle ADB = \angle CAD$ по условию задачи, $\angle ADB = \angle 2$, $\angle CAD = \angle 1$). Значит, $AB = CD$.

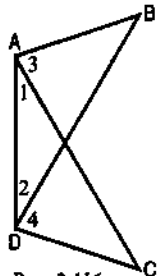


Рис. 2.116

2. Рис. 2.117.

Дано: $AB = BC$, $AF = KC$, $\angle DKA = \angle EFC$.

Доказать: $AD = EC$.

Доказательство: $\Delta\, ABC$ – равнобедренный с основанием AC, следовательно, $\angle A = \angle C$. $\Delta\, ADK = \Delta\, CEF$ по стороне и прилежащим к ней углам ($AK = CF$, так как $AK = AF + FK$, $CF = CK + FK$, а $AF = KC$ по условию задачи; $\angle A = \angle C$; $DKA = \angle EFC$). Так как $\Delta\, ADK = \Delta\, CEF$, то $AD = EC$.

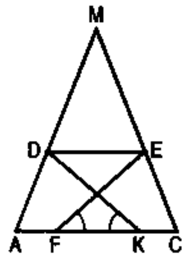


Рис. 2.117

Домашнее задание

Решить задачи № 128, 129, 132, 134.

Урок 20. Третий признак равенства треугольников

Цели урока:

1) доказать третий признак равенства треугольников;
2) научить учащихся решать задачи на применение третьего признака равенства треугольников.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока и поставить цели урока.

II. Проверка домашнего задания. Повторение

1. Проверить домашнюю задачу № 132.

(Решение задачи предложить оформить на доске одного из учащихся.)

Дано: $\angle A$, AK – биссектриса $\angle A$, $a \perp AK$, a пересекает стороны угла A в точках M и N.

Доказать: $\Delta\, AMN$ – равнобедренный.

Доказательство (см. рис. 2.118): Пусть $AK \cap MN = E$. $\Delta\, AME = \Delta\, ANE$ по стороне и прилежащим к ней углам (AE – общая сторона, $\angle MAE = \angle NAE$, так как AK – биссектриса $\angle A$; $\angle MEA = \angle NEA$, так как $AK \perp MN$, $\angle AEM + \angle NEA = 180°$, $\angle MEA = 90°$, значит, и $\angle NEA = 90°$).

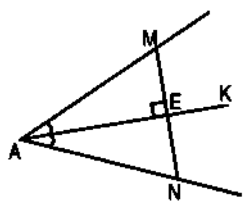


Рис. 2.118

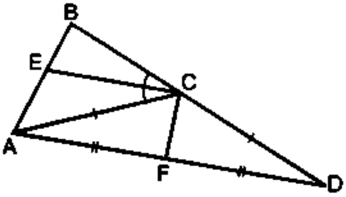


Рис. 2.119

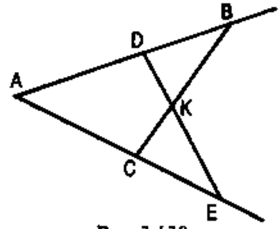


Рис. 2.120

Из равенства треугольников AME и ANE следует равенство сторон AM и AN, то есть $\Delta\, AMN$ – равнобедренный.

2. Решение задач на повторение и закрепление первого и второго признаков равенства треугольников. (Условия задач заранее записаны на доске. Один из учащихся решает на доске, остальные – в тетрадях. Наиболее подготовленным учащимся можно предложить решить задачи самостоятельно.)

Задача 1

В $\Delta\, ABC$ на продолжении стороны BC за точку C отложен отрезок CD, равный CA, а точки A и D соединены отрезком. CE – биссектриса треугольника ACB, а CF – медиана треугольника ACD

Докажите, что $CF \perp CE$.

Доказательство (см. рис. 2.119): По построению $AC = CD$, следовательно, $\Delta\, ACD$ – равнобедренный с основанием AD.

CF – медиана, проведенная к основанию равнобедренного треугольника ACD, и она является биссектрисой угла ACD, то есть $\angle ACF = \angle DCF$. CD – продолжение стороны BC, поэтому $\angle BCD = 180°$. $\angle BCD = \angle BCE + \angle ECA + \angle ACF + \angle FCD = 180°$.

Так как $\angle BCE = \angle ECA$, $\angle ACF = \angle FCD$, то $2\angle ACE + 2\angle ACF = 180°$, $2 \cdot (\angle ACE + \angle ACF) = 180°$.

Так как $\angle ACE + \angle ACF = \angle ECF$, то $\angle ECF = 90°$, то есть $CE \perp CF$.

Задача 2

На одной стороне угла с вершиной A отмечены точки D и B, на другой стороне – C и E так, что $AD = AC = 3$ см, $AB = AE = 4$ см.

Докажите, что: а) $BC = ED$;

б) KB = KE, где K – точка пересечения отрезков BC и ED.

Доказательство (см. рис. 2.120):

а) $\Delta\, ABC = \Delta\, AED$ по двум сторонам и углу между ними ($AB = AE = 4$ см, $AC = AD = 3$ см по условию задачи, $\angle A$ – общий).

Так как $\Delta\, ABC = \Delta\, AED$, то $BC = ED$.

б) Так как $DB = AB - AD = 4$ см – 3 см = 1 см и $CE = AE - AC = 4$ см – 3 см = 1 см, то $DB = CE$. $\angle BDK = 180° - \angle ADK$, $\angle KCE = 180° - \angle AKC$, но $\angle ADK = \angle ACK$ из равенства треугольников ABC и AED, следовательно, $\angle BDK = \angle KCE$.

$\angle ABC = \angle AED$ из равенства треугольников ABC и AED.

$\Delta\, DBK = \Delta\, CEK$ по стороне и прилежащим к ней углам ($DB = CE$, $\angle BDK = \angle KCE$, $\angle ABC = \angle AED$), следовательно, $KB = KE$.

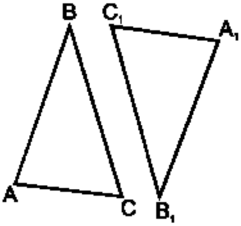


Рис. 2.121

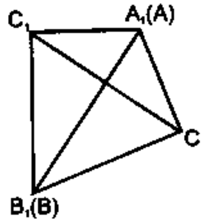


Рис 2.122

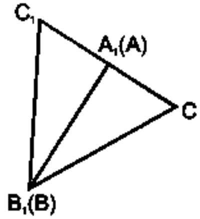


Рис. 2.123

III. Изучение нового материала

Учитель сам читает формулировку третьего признака равенства треугольников и доказывает его до рассмотрения первого случая. Доказательство первого случая можно провести в виде беседы с учащимися.

Третий признак равенства треугольников:

Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Дано: ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$.

Доказать: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство (см. рис. 2.121): Приложим ΔABC к треугольнику $A_1B_1C_1$ так, чтобы сторона AB совместилась со стороной A_1B_1 (они совместятся, так как по условию теоремы $AB = A_1B_1$), а вершины C и C_1 находились по разные стороны от прямой A_1B_1.

Возможны три случая:

1) луч CC_1 проходит внутри угла $B_1C_1A_1$ (рис. 2.122);

2) луч C_1C совпадает с одной из сторон угла $B_1C_1A_1$ (рис. 2.123);

3) луч CC_1 проходит вне угла $B_1C_1A_1$ (рис. 2.124).

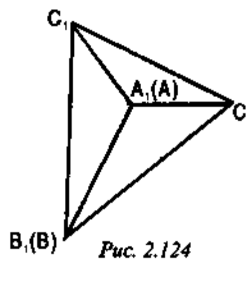


Рис. 2.124

Докажем первый случай.

Вопросы к учащимся:

– Что вы можете сказать о треугольниках C_1A_1C и C_1B_1C? (*Они равнобедренные.*)

– Равны ли углы $A_1C_1B_1$ и ACB? Почему? ($\angle A_1C_1B_1 = \angle ACB$, *так как* $\angle A_1C_1B_1 = \angle A_1C_1C + \angle B_1C_1C$, $\angle ACB = \angle ACC_1 + \angle BCC_1$, *а* $\angle A_1C_1C = \angle ACC_1$, $\angle B_1C_1C = \angle BCC_1$ *как углы при основании равнобедренных треугольников.*)

– Равны ли ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$? ($\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ *по двум сторонам и углу между ними, так* как $AC = A_1C_1$, $CB = C_1B_1$, $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$ *по доказанному.*)

Итак, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Далее можно предложить учащимся доказать равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ во втором или третьем случае, а оставшийся случай рассмотреть дома.

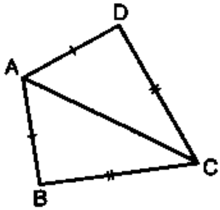


Рис. 2.125

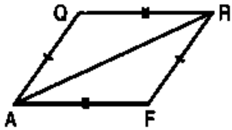


Рис 2.126

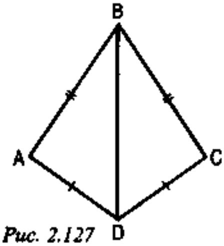


Рис. 2.127

Доказательство второго случая:

ΔB_1C_1C – равнобедренный с основанием CC_1, так как $B_1C_1 = BC = B_1C$ по условию теоремы.

B_1A_1 – медиана ΔB_1C_1C, так как $C_1A_1 = AC$ по условию теоремы, а $AC = A_1C$. Медиана, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, является его биссектрисой, то есть $\angle C_1B_1A_1 = \angle CBA$.

$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по двум сторонам и углу между ними ($AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ по условию теоремы, $\angle CAB = \angle C_1B_1A_1$ по доказанному).

Доказательство третьего случая:

ΔB_1C_1C – равнобедренный с основанием CC_1, так как $B_1C_1 = BC$ по условию теоремы. $\angle B_1C_1C = \angle BCC_1$ как углы при основании равнобедренного треугольника. ΔA_1C_1C – равнобедренный с основанием CC_1, так как $A_1C_1 = AC$ по условию теоремы. $\angle A_1C_1C = \angle ACC_1$ как углы при основании равнобедренного треугольника. $\angle B_1C_1A_1 = \angle BCA$, так как $\angle B_1C_1A_1 = \angle B_1C_1C - \angle A_1C_1C$, $\angle BCA = \angle BCC_1 - \angle ACC_1$, а $\angle B_1C_1C = \angle BCC_1$, и $\angle A_1C_1C = \angle ACC_1$ по доказанному. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по двум сторонам и углу между ними ($BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle BCA = \angle B_1C_1A_1$).

Далее можно ввести понятие ***жесткой*** фигуры или предложить учащимся самостоятельно прочитать стр. 40 учебника – на уроке или дома.

IV. Закрепление изученного материала

1. Решение задач по готовым чертежам:

а) Рис. 2.125.

Дано: $AB = 5$ см, $BC = 0{,}9$ дм.

Найти: AD, DC.

б) Рис. 2.126.

Дано: $P_{AQR} = 15$ см, $P_{AQRF} = 18$ см.

Найти: AR.

в) Рис. 2.127.

Доказать: BD – биссектриса $\angle ABC$.

2. Решение задачи № 139 (один ученик работает у доски, остальные – в тетрадях).

Дано: $AB = CD$, $AD = BC$, BE – биссектриса $\angle ABC$, DF – биссектриса $\angle ADC$.

Доказать: а) $\angle ABE = \angle ADF$; б) $\Delta ABE = \Delta CDF$.

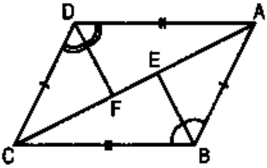


Рис. 2.128

Доказательство (см. рис. 2.128):

а) $\Delta ABC = \Delta CDA$ по трем сторонам ($AB = CD$, $AD = BC$, AC – общая сторона).
$\angle CDA = ABC$, так как $\Delta ABC = \Delta CDA$.
$\angle ABE = 1/2\ \angle ABC$, так как BE – биссектриса $\angle ABC$.
$\angle ADF = 1/2\ \angle CDA$, так как DF – биссектриса $\angle ADC$.
$\angle ABE = \angle ADF$, так как $\angle ABE = 1/2\ \angle ABC$, $\angle ADF = 1/2\ \angle CDA$, а $\angle ABC = \angle CDA$.

б) $\Delta ABE = \Delta CDF$ по стороне и прилежащим к ней углам ($AB = CD$ по условию задачи, $\angle ABE = \angle CDF$ по доказанному в пункте а), $\angle BAE = \angle DCF$ из равенства треугольников ABC и CDA.

Наводящие вопросы к задаче:

а) 1) Что вы можете сказать о треугольниках ABC и CDA?
2) Равны ли углы ABC и CDA? Почему? А углы ABE и ADF?

б) 1) Сколько пар равных сторон в треугольниках ABE и CDF? А углов?
2) Какой из признаков равенства треугольников подходит для того, чтобы ΔABE был бы равен ΔCDF?

V. Самостоятельная работа обучающего характера

(На доске записываются условия задач, учащимся предлагается самим выбрать, какие из задач они будут решать. Листочки с решениями можно вывесить на стене для самопроверки. Учитель контролирует правильность решения задач у слабоуспевающих учащихся и по необходимости консультирует остальных. Учащиеся, самостоятельно справившиеся с работой, по своему усмотрению могут сдать тетради на проверку учителю.)

I уровень

1. Решить задачу № 136.

2. *Дано*: $AB = EF$, $CF = AD$, $CB = DE$, $\angle BCF = 85°$ (рис. 2.129).

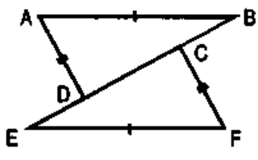


Рис. 2.129

Найти: $\angle ADB$.

Решение: Рассмотрим ΔABD и ΔFEC. У них:
1) $AB = FE$ по условию задачи;
2) $AD = FC$ по условию задачи;
3) $BD = EC$, так как $BD = BC + CD$, $EC = ED + DC$, а $DC = DE$ по условию задачи. Следовательно, $\Delta ABD = \Delta FEC$ по трем сторонам.

Отсюда $\angle ADB = \angle ECF$. $\angle ECF = 180° - \angle BCF = 180° - 85° = 95°$, так как $\angle ECF$ и $\angle BCF$ – смежные. Значит, $\angle ADB = 95°$. (*Ответ*: $\angle ADB = 95°$.)

3. На стороне AC как на основании построены по одну сторону от нее два равнобедренных треугольника ABC и AMC. Докажите, что прямая BM пересекает сторону AC в ее середине.

Доказательство (см. рис. 2.130):

1) $\Delta ABM = \Delta CBM$ по трем сторонам (BM – общая, $AB = BC$, $AM = MC$ как боковые стороны равнобедренных треугольников ABC и AMC).

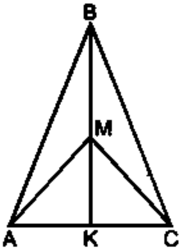


Рис. 2.130

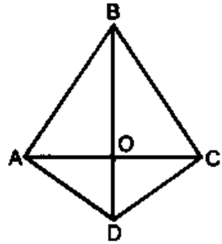


Рис. 2.131

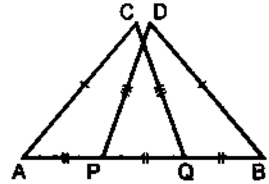


Рис. 2.132

2) $\angle ABM = \angle CBM$, так как $\Delta ABM = \Delta CBM$. Следовательно, BK – биссектриса $\angle ABC$ и биссектриса ΔABC.

3) Биссектриса BK равнобедренного треугольника ABC проведена к основанию AC, а по свойству биссектрисы равнобедренного треугольника она является и медианой.

Отсюда получаем, что $AK = KC$, то есть BK (BM) пересекает сторону AC в ее середине.

II уровень

1. На отрезке AC как на основании построены по разные стороны от него два равнобедренных треугольника ABC и ADC. Докажите, что $BD \perp AC$.

Доказательство (см. рис. 2.131):

1) $\Delta ABD = \Delta CBD$ по трем сторонам ($AB = BC$, $AD = CD$ как боковые стороны равнобедренных треугольников ABC и ADC, BD – общая сторона).

2) Так как $\Delta ABD = \Delta CBD$, то $\angle ABD = \angle CBD$. Это значит, что BD – биссектриса $\angle ABC$.

3) BO – биссектриса, проведенная из вершины равнобедренного треугольника ABC к его основанию AC, а по свойству биссектрисы равнобедренного треугольника она является и его высотой.

Так как BO – высота ΔABC, то $BO \perp AC$, а значит, и $BD \perp AC$.

2. Отрезок прямой AB точками P и Q делится на три равные части. Вне отрезка AB по одну сторону от него взяты точки C и D так, что $AB = BD$ и $CQ = DP$, $\angle DPB + \angle CQA = 140°$.

Найти: $\angle DPB$ и $\angle CQA$.

Решение (см. рис. 2.132):

1) $\Delta ACQ = \Delta BDP$ по трем сторонам ($AC = BD$, $CQ = DP$ по условию задачи, $AQ = BP$, так как $AQ = 2/3\ AB$ и $BP = 2/3\ AB$).

2) $\angle DPB = \angle CQA$, так как $\Delta ACQ = \Delta BDP$.

3) Так как $\angle DPB = \angle CQA$ и по условию задачи $\angle DPB + \angle CQA = 140°$, то $\angle DPB = 70°$ и $\angle CQA = 70°$.

(*Ответ*: $\angle DPB = 70°$, $\angle CQA = 70°$.)

3. ABC и $A_1B_1C_1$ – равнобедренные треугольники с основаниями AC и A_1C_1, точки M и M_1 – середины сторон BC и B_1C_1. $AB = A_1B_1$, $AM = A_1M_1$.

Докажите, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство (см. рис. 2.133):

1) Так как $AB = A_1B_1$ и треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ – равнобедренные с основаниями AC и A_1C_1, то и $BC = B_1C_1$.

2) Так как $BC = B_1C_1$, M и M_1 – середины BC и B_1C_1, то $BM = B_1M_1$.

3) $\Delta ABM = \Delta A_1B_1M_1$ по трем сторонам ($AB = A_1B_1$, $BM = B_1M_1$, $AM = A_1M_1$).

4) Так как $\Delta ABM = \Delta A_1B_1M_1$, то $\angle B = \angle B_1$.

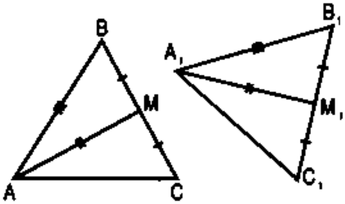


Рис. 2.133

5) $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по двум сторонам и углу между ними ($AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$).

VI. Домашнее задание

1. § 20, вопрос 15.

2. Решить задачи № 135, 137, 138.

3. *Дополнительная задача:*

Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Точки D и E лежат соответственно на сторонах AB и BC, $AD = CE$. DC пересекает AE в точке O.

Докажите, что ΔAOC – равнобедренный.

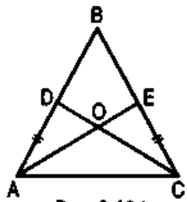


Рис. 2.134

Доказательство (см. рис. 2.134):

1) $\Delta ABE = \Delta CBD$ по двум сторонам и углу между ними ($AB = CB$, так как ΔABC – равнобедренный; $BE = BD$, так как $BE = BC - EC$, $BD = AB - AD$ и $AB = BC$, $EC = AD$; $\angle B$ – общий).

2) $\Delta ADO = \Delta CEO$ по стороне и прилежащим к ней углам ($AD = CE$ по условию задачи; $\angle DAO = \angle ECO$ из равенства треугольников ABE и CBD; $\angle ODA = \angle OEC$, так как $\angle ODA = 180° - \angle BDO$, $\angle OEC = 180° - \angle BEO$, а $\angle BDO = \angle BEO$ из равенства треугольников ABE и CBD).

3) Так как $\Delta ADO = \Delta CEO$, то $AO = CO$, следовательно, ΔAOC – равнобедренный.

Урок 21. Решение задач на применение признаков равенства треугольников

Цель урока:

совершенствование навыков решения задач на применение признаков равенства треугольников.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

1. Теоретический опрос.

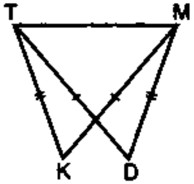


Рис. 2.135

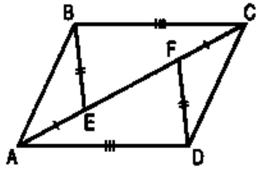


Рис. 2.136

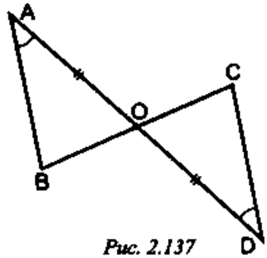


Рис. 2.137

Доказать третий признак равенства треугольников (можно трех учащихся попросить подготовить у доски доказательство теоремы, один из них готовит I случай, второй – II, третий – III).

2. Устное решение задач № 75, 76 из рабочей тетради.

3. Решение задач по готовым чертежам:

I уровень – устно

(фронтальная работа с классом)

1) Рис. 2.135.

Дано: $KM = DT$, $KT = DM$.

Доказать: $\Delta\, TKM = \Delta\, MDT$.

2) Рис. 2.136.

Дано: $BC = AD$, $BE = DF$, $AE = CF$.

Доказать: а) $\Delta\, ADF = \Delta\, CBE$; б) $\Delta\, ABE = \Delta\, CDF$.

3) Рис. 2.137.

Дано: $AO = 4$ см, $BC = 5$ см, $CD = 4{,}5$ см.

Найти: P_{ABO}.

4) Рис. 2.138.

Дано: $\angle EDC = \angle KDC$, $DE = DK$, $\angle ECD = 30°$.

Найти: $\angle ECK$.

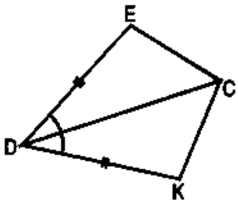


Рис. 2.138

II уровень – решить самостоятельно, коротко записать решение в тетрадях

1) *Доказать*: $\angle C = \angle F$ (рис. 2.139).

Доказательство: $\Delta\, ACK = \Delta\, AFB$ ($AC = AF$, $AK = AB$, $\angle A$ – общий).

Рассмотрим $\Delta\, CBD$ и $\Delta\, FKD$. У них:

1) $CB = KF$;

2) $\angle C = \angle F$ из равенства $\Delta\, ACK$ и $\Delta\, AFB$;

3) $\angle CBD = \angle FKD$, так как $\angle CBD = 180° - \angle AFB$, $\angle FKD = 180° - \angle AKC$, а $\angle AFB = \angle AKC$ из равенства $\Delta\, ACK$ и $\Delta\, AFB$.

Следовательно, $\Delta\, CBD = \Delta\, FKD$ по стороне и прилежащим к ней углам, а значит, $\angle C = \angle F$.

2) *Дано*: $AC = 10$ см, $AC : BF = 2 : 1$, $BC = 6$ см (рис. 2.140).

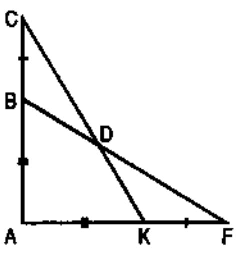


Рис. 2.139

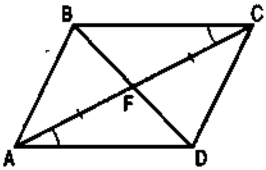


Рис. 2.140

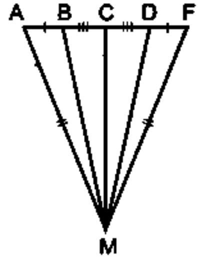


Рис. 2.141

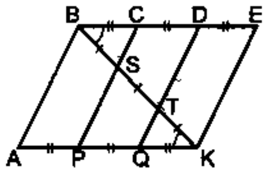


Рис. 2.142

Найти: P_{AOF}

Решение: $\Delta\, AFD = \Delta\, CFB$ по стороне и прилежащим к ней углам ($AF = FC$, $\angle FAD = \angle FCB$ по условию задачи, $\angle CFB = \angle AFD$ как вертикальные).

Так как $\Delta\, AFD = \Delta\, CFB$, то $AF = FC$ и $AF = 5$ см, $FC = 5$ см ($AC = 10$ см). $AC : BF = 2 : 1$, то есть $AC = 2\, BF$. Отсюда $BF = 2{,}5$ см.

$P_{BFC} = BC + BF + FC = 6$ см $+ 2{,}5$ см $+5$ см $= 13{,}5$ см.

Так как $\Delta\, AFD = \Delta\, CFB$, то $P_{AFD} = 13{,}5$ см. (*Ответ*: $P_{AFD} = 13{,}5$ см.)

3) *Доказать*: MC – биссектриса $\angle BMD$ (рис. 2.141).

Доказательство: $\Delta\, AMF$ – равнобедренный с основанием AF, так как $AM = MF$. Следовательно, $\angle A = \angle F$.

$\Delta\, ABM = \Delta\, FDM$ по двум сторонам и углу между ними ($AB = FD$, $AM = FM$, $\angle A = \angle F$). Так как $\Delta\, ABM = \Delta\, FDM$, то $BM = DM$.

Следовательно, $\Delta\, MBD$ – равнобедренный с основанием BD, в котором MC – медиана, проведенная к основанию. По свойству медианы равнобедренного треугольника MC является биссектрисой $\angle BMD$.

4) *Доказать*: $CP = DQ$ (рис. 2.142).

Доказательство: $\Delta\, BCS = \Delta\, KQT$ по двум сторонам и углу между ними ($BC = KQ$, $BS = KT$, $\angle CBS = \angle TKQ$).

$\Delta\, BDT = \Delta\, KSP$ по двум сторонам и углу между ними ($BD = KP$, $BT = KS$, $\angle CBS = \angle TKQ$).

$CP = DQ$, так как $CP = CS + SP$, $DQ = QT + DT$, а $CS = QT$ из равенства треугольников BCS и KQT, $SP = TD$ из равенства треугольников BDT и KSP.

III. Самостоятельная работа

I уровень

Вариант I

1. *Дано:* $AB = CD$, $BC = DA$, $\angle C = 40°$ (рис. 2.143).

Доказать: $\Delta\, ABD = \Delta\, CDB$. Найти: $\angle A$.

2. На боковых сторонах равнобедренного треугольника ABC отложены равные отрезки BM и BN. BD – медиана треугольника.

Докажите, что $MD = ND$.

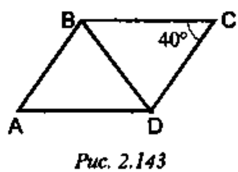


Рис. 2.143

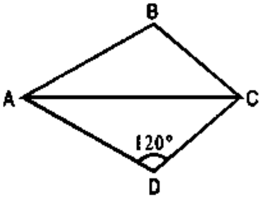


Рис. 2.144

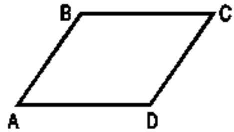


Рис. 2.145

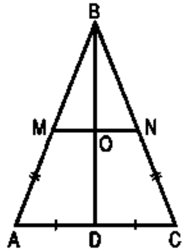


Рис. 2.146

3. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Точки D и D_1 лежат соответственно на сторонах AC и A_1C_1, причем $CD = C_1D_1$.

Докажите, что $\Delta\ BDC = \Delta\ B_1D_1C_1$. *Сравните* BD и B_1D_1.

Вариант II

1. *Дано*: $AD = AB$, $CD = CB$, $\angle D = 120°$ (рис. 2.144).

Доказать: $\Delta\ DAC = \Delta\ BAC$.

Найти: $\angle B$.

2. На боковых сторонах равнобедренного треугольника ABC отложены равные отрезки BM и BN. BD – высота треугольника.

Докажите, что $MD = ND$.

3. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$. Точки D и D_1 лежат соответственно на сторонах AC и A_1C_1, $\angle DBC = \angle D_1B_1C_1$.

Докажите, что $\Delta\ BDC = \Delta\ B_1D_1C_1$.

Сравните $\angle BDC$ и $\angle B_1C_1D_1$.

II уровень

Вариант I

1. *Дано*: $AB = CD$, $BC = AD$ (рис. 2.145).

Доказать: $\angle A = \angle C$.

2. На боковых сторонах равнобедренного треугольника ABC с основанием AC отложены равные отрезки AM и CN. BD, медиана $\Delta\ ABC$, пересекает отрезок MN в точке O. Докажите, что BO – медиана $\Delta\ MBN$.

Доказательство (рис. 2.146):

1) $\Delta\ ABC$ – равнобедренный с основанием AC, и медиана BD является его биссектрисой.

2) $\Delta\ MBN$ – равнобедренный с основанием MN, так как $MB = BN$ ($MB = BA - MA$; $BN = BC - NC$, $BA = BC$, $MA = NC$). BD – биссектриса $\angle MBN$, и по свойству биссектрисы равнобедренного треугольника она является медианой, то есть BO – медиана $\Delta\ MBN$.

3. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. На сторонах BC и B_1C_1 отмечены точки D и D_1 так, что $\angle CAD = \angle C_1A_1D_1$.

Докажите, что:

а) $\Delta\ ADC = \Delta\ A_1D_1C_1$;

б) $\Delta\ ADB = \Delta\ A_1D_1B_1$.

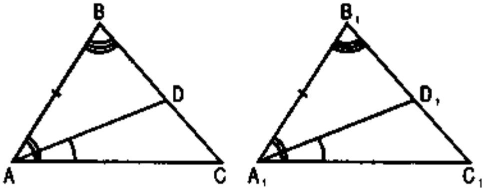


Рис. 2.147

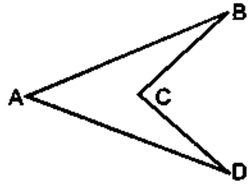


Рис. 2 148

Доказательство (см. рис. 2.147):

а) $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по стороне и прилежащим к ней углам ($AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ по условию задачи).

$\Delta ADC = \Delta A_1D_1C_1$ по стороне и прилежащим к ней углам ($AC = A_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$ из равенства ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$, $\angle CAD = \angle C_1A_1D_1$ по условию задачи).

б) Так как $\Delta ADC = \Delta A_1D_1C_1$, то $DC = D_1C_1$, следовательно, равны отрезки BD и B_1D_1 ($BC = B_1C_1$ из равенства треугольников ABC и $A_1B_1C_1$).

Так как $AB = A_1B_1$, $\angle B = \angle B_1$ из равенства треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ и $BD = B_1D_1$, то $\Delta ABD = \Delta A_1B_1D_1$ по двум сторонам и углу между ними.

Вариант II

1. *Дано*: $AB = AD$, $BC = DC$ (рис. 2.148).

Доказать: $\angle B = \angle D$.

2. Дан равнобедренный ΔABC с основанием AC и высотой BD. На лучах BA и BC вне треугольника ABC отложены равные отрезки AM и CN. Луч BD пересекает отрезок MN в точке O.

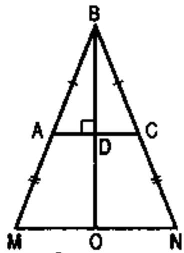


Рис. 2 149

Доказать, что BO – высота Δ MBN.

Доказательство (см. рис. 2.149):

1) ΔABC – равнобедренный с основанием AC, и высота BD, проведенная из его вершины к основанию, является и его биссектрисой, то есть BO – биссектриса $\angle ABC$ и $\angle MBN$ тоже.

2) ΔMBN – равнобедренный с основанием MN ($BM = BA + AM$, $BN = BC + CN$; так как $BA = BC$ и $AM = CN$, то $BM = BN$). В равнобедренном ΔMBN биссектриса BO, проведенная из его вершины к основанию, является и его высотой.

3. В треугольниках DEC и $D_1E_1C_1$ $DE = D_1E_1$, $\angle D = \angle D_1$, $\angle E = \angle E_1$. На сторонах DE и D_1E_1 отмечены точки P и P_1 так, что $\angle DCP = \angle D_1C_1P_1$. Докажите, что: а) $\Delta DCP = \Delta D_1C_1P_1$; б) $\Delta CPE = \Delta C_1P_1E_1$.

Доказательство (рис. 2.150):

а) $\Delta DEC = \Delta D_1E_1C_1$ по стороне и прилежащим к ней углам ($DE = D_1E_1$, $\angle D = \angle D_1$, $\angle E = \angle E_1$).

Так как $\Delta DEC = \Delta D_1E_1C_1$, то $DC = D_1C_1$. Тогда $\Delta DCP = \Delta D_1C_1P_1$ по стороне и прилежащим к ней углам ($DC = D_1C_1$, $\angle D = \angle D_1$, $\angle PCD = \angle P_1C_1D_1$).

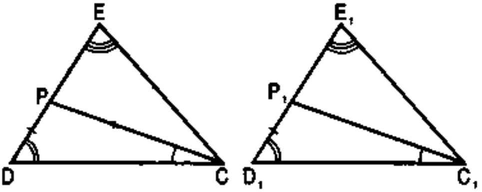


Рис. 2.150

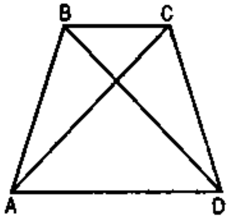


Рис. 2.151

б) Так как $\Delta\ DEC = \Delta\ D_1E_1C_1$, то $EC = E_1C_1$, $\angle ECD = \angle E_1C_1D_1$. Так как $\angle ECD = \angle E_1C_1D_1$, $\angle DCP = \angle D_1C_1P_1$, а $\angle ECP = \angle ECD - \angle DCP$, $\angle E_1C_1P_1 = \angle E_1C_1D_1 - \angle D_1C_1P_1$, то $\angle ECP = \angle E_1C_1P_1$. Так как $EC = E_1C_1$, $\angle E = \angle E_1$, $\angle ECP = \angle E_1C_1P_1$, то $\Delta\ PEC = \Delta\ P_1E_1C_1$ по стороне и прилежащим к ней углам.

III уровень

Вариант I

1. *Дано*: $AB = CD$, $AC = BD$ (рис. 2.151).

Доказать: $\angle CAD = \angle BDA$.

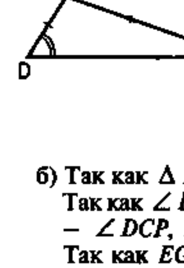


Рис. 2.152

2. Рис. 2.152.

$\Delta\ MNP$ – равнобедренный с основанием MP, точка K – середина отрезка MP, $ME = PF$. Докажите, что луч KN – биссектриса угла EKF.

Доказательство: $\Delta\ MEK = \Delta\ PFK$ по двум сторонам и углу между ними ($ME = FP$, $MK = KP$ по условию задачи, $\angle M = \angle P$ как углы при основании равнобедренного $\Delta\ MNP$). Следовательно, $KE = KF$.

$\Delta\ KEN = \Delta\ KFN$ по трем сторонам ($KE = KF$; KN – общая сторона; $NE = NF$, так как $NE = MN - ME$, $NF = PN - PF$, а $MN = PN$, $ME = PF$). Следовательно, $\angle EKN = \angle FKN$.

Так как $\angle EKN = \angle FKN$, то KN – биссектриса угла EKF.

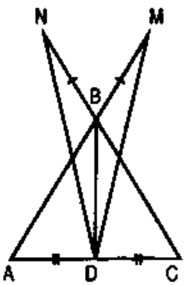


Рис. 2.153

3. В равнобедренном треугольнике ABC точка D – середина основания AC. На лучах AB и CB вне треугольника ABC отмечены точки M и N соответственно – так, что $BM = BN$.

Докажите, что $\Delta\ BDM = \Delta\ BDN$.

Доказательство (см. рис. 2.153): Так как D – середина основания равнобедренного $\Delta\ ABC$ с основанием AC, то BD – медиана, а значит, и биссектриса $\Delta\ ABC$. Следовательно, $\angle ABD = \angle CBD$.

$\angle NBA = \angle CBM$ как вертикальные.

$\angle NBD = \angle NBA + \angle ABD$, а $\angle MBD = \angle MBC + \angle CBD$. Так как $\angle ABD = \angle CBD$, $\angle MBC = \angle NBA$, то $\angle NBD = \angle MBD$.

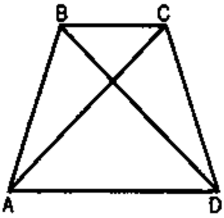


Рис. 2.154

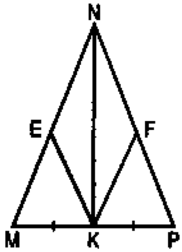


Рис. 2.155

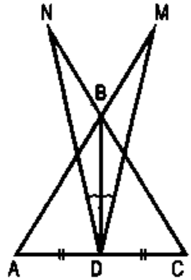


Рис. 2.156

Δ *NBD* = Δ *MBD* по двум сторонам и углу между ними (*NB* = *MB*; *BD* – общая сторона; $\angle$ *NBD* = $\angle$ *MBD*).

Вариант II

1. *Дано*: *AB* = *CD*, *AC* = *BD* (рис. 2.154).

Доказать: $\angle$ *ACB* = $\angle$ *DBC*.

2. Рис. 2.155.

Δ *MNP* – равнобедренный с основанием *MP*, точка *K* – середина отрезка *MP*, $\angle$ *MKE* = $\angle$ *PKF*.

Докажите, что Δ *NEK* = Δ *NFK*.

Доказательство: Δ *MEK* = Δ *PFK* по стороне и прилежащим к ней углам (*MK* = *KP*, так как *K* – середина *MP*; $\angle$ *MKE* = $\angle$ *PKF* по условию задачи; $\angle$ *M* = $\angle$ *P* как углы при основании равнобедренного Δ *MNP*.

Так как Δ *MEK* = Δ *PFK*, то *ME* = *PF*, следовательно, *EN* = *FN* (*EN* = = *MN* – *ME*, *FN* = *PN* – *PF*, а *MN* = *FN* как боковые стороны равнобедренного треугольника).

Так как Δ *MEK* = Δ *PFK*, то *KE* = *KF*.

Δ *NEK* = Δ *NFK* по трем сторонам (*NK* – общая сторона, *NE* = *EF*, *EK* = *FK*).

3. В равнобедренном Δ *ABC* точка *D* – середина основания *AC*. На лучах *AB* и *CB* вне Δ *ABC* отмечены точки *M* и *N* соответственно, так, что $\angle$ *BDM* = $\angle$ *BDN*.

Докажите, что Δ *BDM* = Δ *BDN*.

Доказательство (см. рис. 2.156): Так как *D* – середина основания *AC* равнобедренного Δ *ABC*, то *BD* – медиана и биссектриса Δ *ABC*. Следовательно, $\angle$ *ABD* = $\angle$ *CBD*.

$\angle$ *NBA* = $\angle$ *CBM* как вертикальные. Поэтому $\angle$ *NBD* = $\angle$ *MBD* ($\angle$ *NBD* = $\angle$ *NBA* + $\angle$ *ABD*, $\angle$ *MBD* = $\angle$ *MBC* + $\angle$ *CBD*, а $\angle$ *NBA* = = $\angle$ *CBM*, $\angle$ *ABD* = $\angle$ *CBD*).

Δ *BDM* = Δ *BDN* по стороне и прилежащим к ней углам (*BD* – общая сторона, $\angle$ *NBD* = $\angle$ *MBD*, $\angle$ *BDM* = $\angle$ *BDN*).

Домашнее задание

1. Решить задачи № 140, 141, 142.

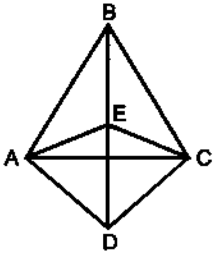


Рис. 2.157

2. *Дополнительная задача:*

Два равнобедренных треугольника ABC и ADC имеют общее основание AC. Вершины B и D расположены по разные стороны от AC. Точка E лежит на отрезке BD, но не лежит на отрезке AC.

Докажите, что $\angle EAC = \angle ACE$.

Доказательство (см. рис. 2.157):

1) $\Delta ABD = \Delta CBD$ по трем сторонам ($AB = BC$, так как ΔABC – равнобедренный; $AD = CD$, так как ΔADC – равнобедренный; BD – общая сторона).

2) Так как $\Delta ABD = \Delta CBD$, то $\angle ABE = \angle CBE$.

3) $\Delta ABE = \Delta CBE$ по двум сторонам и углу между ними ($AB = BC$; BE – общая сторона; $\angle ABE = \angle CBE$).

4) Так как $\Delta ABE = \Delta CBE$, то $AE = CE$, то есть ΔAEC – равнобедренный с основанием AC, а $\angle EAC = \angle ACE$ как углы при основании равнобедренного треугольника.

Урок 22. Окружность

Цели урока:

1) систематизация знаний об окружности и ее элементах;

2) отработка навыков решения задач по заданной теме.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

1. Проверить домашнюю дополнительную задачу через проектор или попросить одного из учащихся подготовить решение на доске.

2. Анализ ошибок самостоятельной работы.

(Устно решить задачи, с которыми не справились большинство учащихся. Краткие условия и рисунки к этим задачам подготовить на доске заранее. II способ: на доске написать одно из неправильных решений задачи и предложить учащимся найти ошибки в решении.)

III. Изучение нового материала

Понятие окружности и ее элементов вводится в курсе математики пятого класса, поэтому изучение нового материала можно организовать следующим образом:

1. Прочитать самостоятельно § 21.

2. Выполнить задания теста (на каждую парту раздаются листочки с тестовым заданием. Учитель читает первое задание, учащиеся предлагают верный ответ. Таким же образом решается второе задание и т.д.):

1) Вычеркнуть ненужные слова текста в скобках:

а) Окружность – это (*абстрактная, геометрическая, плоская*) фигура, состоящая из (*множества, всех*) точек, расположенных на (*одинаковом, заданном*) расстоянии от (*некоторой, центральной*) точки.

б) Радиусом окружности называется (*линия, прямая, отрезок*), соединяющая центр окружности с (*заданной, какой-либо*) точкой окружности.

2) Диаметр окружности – это... (закончить определение):
а) два радиуса, лежащие на одной прямой;
б) хорда, проходящая через центр окружности;
в) прямая, проходящая через две точки и центр окружности.

3) Центр окружности – это... (закончить определение):
а) точка, куда ставится ножка циркуля при начертании окружности;
б) середина окружности;
в) точка, равноудаленная от всех точек окружности.

4) Дуга окружности – это... (закончить определение):
а) часть окружности, выделенная точками;
б) часть окружности, ограниченная двумя точками;
в) часть окружности, ограниченная хордой.

5) Определить, на сколько дуг делят окружность две точки, лежащие на окружности. Выбрать правильный ответ:
а) на одну;
б) на две.

6) Как изображается хорда на чертеже окружности? Выбрать правильный ответ:
а) прямой линией;
б) дугой окружности;
в) отрезком с концами, лежащими на окружности.

7) Как называется отрезок, соединяющий центр окружности с любой точкой окружности? Выбрать правильный ответ:
а) длина окружности;
б) радиус окружности;
в) половина диаметра окружности.

8) Выбрать на рисунке:
а) хорду (рис. 2.158);
б) диаметр (рис. 2.159).

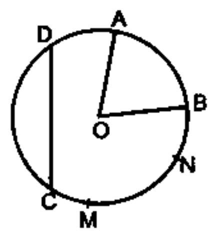


Рис. 2.158

IV. Закрепление изученного материала

1. Решить устно задачи № 77 и № 78 из рабочей тетради.

2. Устно решить задачу № 143.

Задача № 143

а) хорды окружности: *CD*, *MN*, *AB*.

б) диаметры окружности: *AB*.

в) радиусы окружности: *OB*, *OA*, *OP*.

3. У доски и в тетрадях решить задачу № 146.

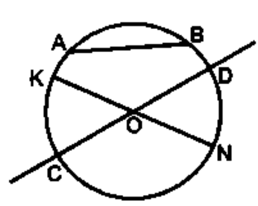


Рис. 2.159

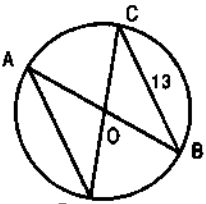


Рис. к задаче 146

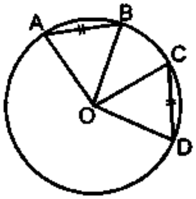


Рис. 2 160

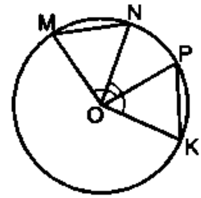


Рис. 2.161

Задача № 146

Δ *COB* = Δ *DOA* по двум сторонам и углу между ними (*OC* = *OD*, *OB* = = *OA* как радиусы одной окружности, $\angle$ *COB* = $\angle$ *DOA* как вертикальные) => *AD* = *CB* = 13 см. Так как *AB* – диаметр окружности, *O* – ее центр и *AB* = 16 см, то *AO* = *OD* = 8 см, тогда $P_{AOD} = AO + OD + AD = 8+8+13 =$ = 29 (см). (*Ответ*: 29 см.)

Наводящие вопросы:

1) Что вы можете сказать о треугольниках *COB* и *DOA*?

2) Чем являются *OA*, *OB*, *OC*, *OD* по отношению к данной окружности? Чему равны их длины?

3) Чему равен периметр треугольника *AOD*?

V. Самостоятельная работа обучающего характера

(На доске записать задачи I и II уровней и предложить учащимся самим выбрать задачи, которые они будут решать. В ходе выполнения самостоятельной работы учитель оказывает индивидуальную помощь при необходимости.)

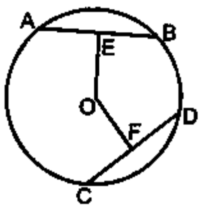


Рис. 2.162

I уровень

1. Рис. 2.160.

Доказать: $\angle AOB = \angle COD$.

2. Рис. 2.161.

Дано: $\angle MOP = \angle NOK$.

Доказать: $MN = PK$.

3. Рис. 2.162.

Дано: $AB = CD$, *E* – середина *AB*, *F* – середина *CD*.

Доказать: $OE = OF$.

4. В окружности с центром *O* проведены диаметр *AC* и радиус *OB* так, что хорда *BC* равна радиусу.

Найдите $\angle AOB$, если $\angle BCO = 60°$.

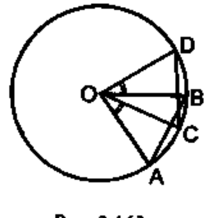


Рис. 2.163

II уровень

1. Рис. 2.163.

В окружности с центром *O* проведены хорды *AB* и *CD*.

Докажите, что если $\angle AOC = \angle BOD$, то $AB =$ $= CD$.

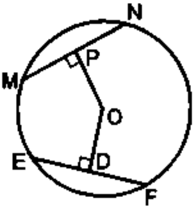


Рис. 2.164

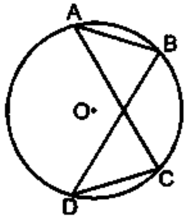


Рис. 2.165

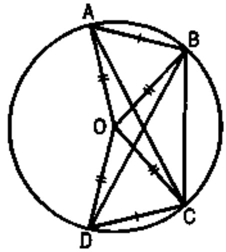


Рис. 2.166

Доказательство:

1) По условию задачи $\angle AOC = \angle BOD$. $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$, $\angle COD = \angle COB + \angle BOD$. Отсюда следует, что $\angle AOB = \angle COD$.

2) $\Delta AOB = \Delta COD$ по двум сторонам и углу между ними ($OA = OC$, $OB = OD$ как радиусы одной окружности, $\angle AOB = \angle COD$).

3) Так как $\Delta AOB = \Delta COD$, то $AB = CD$.

2. *Дано*: $MN = EF$; $OP \perp MN$; $OD \perp EF$ (рис. 2.164).

Доказать: $OP = OD$.

Доказательство:

1) $\Delta MNO = \Delta EFO$ по трем сторонам ($MN = EF$ по условию задачи; $MO = EO$, $NO = FO$ как радиусы одной окружности). Отсюда следует, что $\angle PNO = \angle DEO$.

2) $\Delta PNO = \Delta DEO$ по стороне прилежащим к ней углам ($PN = DE$, так как $PN = 1/2\ MN$, $DE = 1/2\ EF$, а $MN = EF$ по условию задачи; $\angle PNO = \angle DEO$ по доказанному; $\angle NPO = \angle EDO$, так как $OP \perp MN$, $OD \perp EF$). Отсюда следует, что $OP = OD$.

3. *Дано*: $AB = CD$ (рис. 2.165).

Доказать: $AC = BD$.

Доказательство (см. рис. 2.166):

1) $\Delta AOB = \Delta COD$ по трем сторонам ($AO = BO = CO = DO$ как радиусы одной окружности; $AB = CD$ по условию задачи). Значит, $\angle ABO = \angle DCO$.

2) ΔOBC – равнобедренный с основанием BC, и $\angle OBC = \angle OCB$ как углы при основании равнобедренного треугольника.

3) $\angle ABC = \angle ABO + \angle OBC$, $\angle DCB = \angle DCO + \angle OCB$, но $\angle ABO = \angle DCO$, а $\angle OBC = \angle OCB$, следовательно, $\angle ABC = \angle DCB$.

4) $\Delta ABC = \Delta DCB$ по двум сторонам и углу между ними ($AB = CD$, BC – общая сторона, $\angle ABC = \angle DCB$). Отсюда следует, что $AC = BD$.

4. Отрезок BD – высота ΔABC. От вершины B на прямой CB по обе стороны от точки B отложены отрезки BE и BK, равные AB. На AC от точки D отложен отрезок DF, равный DA. Докажите, что точки A, E, K и F лежат на одной окружности.

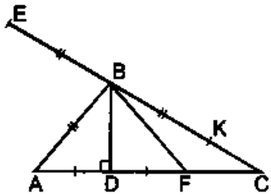


Рис 2.167

Доказательство (см. рис. 2.167):

1) По построению $BE = BK = AB$.

2) Так как $AD = DF$, $BD \perp AF$, то $\Delta ABD = \Delta FDB$ по двум сторонам и углу между ними ($AD = DF$, BD – общая сторона, $\angle ADB = \angle FDB = 90°$), следовательно, $AB = BF$.

3) Получили, что $BE = BK = AB = BF$, то есть точки A, E, K, F равноудалены от точки B. Это значит, что данные точки лежат на окружности с центром в точке B, а радиус этой окружности равен длине AB (BE, BK, BF).

Домашнее задание

1. § 21, вопрос 16.
2. Решить задачи № 144, 145, 147.
3. *Дополнительная задача:*

AB и CD – два диаметра окружности с центром в точке O. Луч OE – биссектриса угла AOC. OE пересекает окружность в точке K, причем $KE = KO$. Периметр треугольника KCO в три раза больше радиуса окружности.

Докажите, что точки E, A, C и O лежат на одной окружности.

Доказательство (см. рис. 2.168):

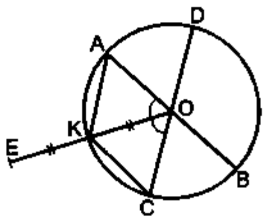


Рис. 2.168

1) $\Delta OKA = \Delta OKC$ по двум сторонам и углу между ними ($OA = OC$ как радиусы одной окружности; OK – общая сторона; $\angle AOK = \angle COK$, так как OE – биссектриса угла AOC). Отсюда $KA = KC$.

2) По условию задачи $P_{KCO} = 3R$, где R – радиус окружности. $OK = R$, $OC = R$, следовательно, $KC = R$.

3) По условию задачи $KE = KO$, а так как $KO = R$, то $KE = R$. По доказанному $KC = R$, но $KC = AK$, следовательно, $AK = R$.

Итак, получили, что $KO = R$, $KE = R$, $KA = R$, $KC = R$, т.е. точки E, A, C и O равноудалены от точки K и лежат на одной окружности.

Урок 23. Примеры задач на построение

Цели урока:

1) дать представление о задачах на построение;
2) рассмотреть наиболее простые задачи на построение и научить учащихся решать их.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока и сформулировать цели урока.

II. Повторение. Проверка домашнего задания

1. Теоретический опрос (вопрос 16).

2. Разобрать решение дополнительной домашней задачи (можно заслушать одного из учащихся, справившихся с решением задачи). Для проверки усвоения принципа решения данной задачи можно задать менее подготовленным учащимся следующие вопросы:

– В каком случае точки E, A, C и O будут лежать на одной окружности? (*Если найдется такая точка X, что $XE = XA = XC = XO$.*)

– Какая точка, по вашему мнению, может служить центром такой окружности? (*Точка K.*)

– Как доказать равенство отрезков KE, KA, KC, KO? (*$KO = KE$ по условию задачи. Нужно еще доказать, что $KA = KC$. Это можно сделать, доказав равенство треугольников OAK и OCK.*)

– Почему $KC = KO$? (*По условию задачи периметр $\Delta\ KCO$ в три раза больше радиуса окружности. Две стороны $\Delta\ KCO$ OK и OC равны радиусу, значит, и третья сторона, KC, также равна радиусу.*)

3. Для подготовки учащихся к восприятию нового материала можно выполнить следующие упражнения:

– Какой инструмент используется для того, чтобы начертить отрезок заданной длины? А угол заданной градусной меры? (Линейка с миллиметровыми делениями, транспортир).

1) Начертите $\Delta\ ABC$ такой, что $AB = 3{,}6$ см, $AC = 2{,}7$ см, $\angle A = 48°$.

2) Начертите $\Delta\ ABC$ такой, что $AB = 4$ см, $\angle A = 62°$, $\angle C = 54°$.

3) Начертите $\Delta\ ABC$ такой, что $AB = 5$ см, $BC = 4$ см, $AC = 6$ см.

Задания можно дать по одному на ряд, по группам и т.д., а затем заслушать учащихся.

Эти задачи мы решали с помощью линейки с миллиметровыми делениями и транспортира. Но есть такие задачи, в которых бывает оговорено, с помощью каких инструментов нужно построить нужную геометрическую фигуру, например, такая: «С помощью циркуля и линейки построить отрезок, равный данному (рис. 2.169)».

Рис. 2.169

При этом линейка не содержит делений, и ставить на линейке деления нельзя. Новый отрезок должен иметь такую же длину, как в задаче. (Можно объединить учащихся в небольшие группы и дать 3–5 минут на обдумывание решения. После этого заслушать все варианты решений и обсудить их, при этом попросить учащихся доказать, что новый отрезок имеет ту же длину, что и отрезок в условии задачи. В заключение можно сделать вывод.)

Вывод: Очень многие построения в геометрии могут быть выполнены с помощью циркуля и линейки без делений. Такие задачи мы будем называть задачами на построение. Итак, тема сегодняшнего урока «Задачи на построение».

III. Изучение нового материала

(Проводится в виде небольшой лекции учителя.)

Задачи на построение – это такие задачи, при решении которых нужно построить геометрическую фигуру, удовлетворяющую условиям задачи, с помощью циркуля и линейки без делений.

Схема решения задач на построение:

1) Анализ (рисунок искомой фигуры, устанавливающий связи между данными задачи и искомыми элементами, и план построения).

2) Построение по намеченному плану.

3) Доказательство, что данная фигура удовлетворяет условиям задачи.

4) Исследование (при любых ли данных задача имеет решение, и если имеет, то сколько).

Необходимо обратить внимание учащихся на то, что при решении простых задач достаточно только второго пункта схемы решения задач на построение, а в некоторых используют второй и третий пункты. В 7 классе учащиеся решают самые простые задачи на построение.

IV. Отработка навыков решения задач на построение

(Разделить весь класс на шесть групп, каждая из которых готовит одну из задач на построение по учебнику в течение 3–5 минут. Далее выходит представитель первой группы и решает на доске первую задачу, все остальные учащиеся работают в тетрадях. Затем таким же образом решается вторая задача и т.д.)

– На данном луче от его начала отложить отрезок, равный данному (§ 22);
– Отложить от данного луча угол, равный данному (§ 23);
– Построить биссектрису данного угла (§ 23);
– Построить прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную к прямой, на которой лежит данная точка (§ 23);
– Построить середину данного отрезка (§ 23);
– Построить прямую, проходящую через точку, не лежащую на данной прямой, перпендикулярную этой прямой (задача № 153).

Домашнее задание

1. § 22, 23, вопросы 17–21.
2. Решить задачу № 153.

Урок 24. Решение задач на построение

Цели урока:

1) закрепить у учащихся навыки решения простейших задач на построение;
2) научить решать задачи на построение.

Ход урока

I. Организационный момент

Сформулировать тему урока, сообщить цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

1. Теоретический опрос по вопросам 18–21 и задаче № 153.

Наиболее подготовленным учащимся можно дать решить задачи на построение № 2–6 (см. план предыдущего урока) с доказательством самостоятельно.

2. Фронтальная работа с менее подготовленными учащимися – повторить решение задач на построение № 1–6 (см. план предыдущего урока) у доски и в тетрадях учащихся без доказательства.

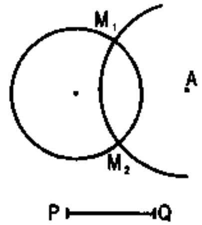


Рис. 2.170

III. Решение задач

1. Решить задачи № 79 и 80 из рабочей тетради.
2. Решить задачу № 150 (один ученик работает у доски, остальные – в тетрадях).

Задача № 150

Построение (см. рис. 2.170):

Начертим окружность с центром в точке A и радиусом, равным PQ. Точки пересечения построенной и данной по условию задачи окружностей – искомые точки.

Таких точек может быть: 1) две, если окружности пересекаются в двух точках; 2) одна, если окружности имеют одну общую точку; 3) ни одной, если окружности не пересекаются. Таким образом, задача не всегда имеет решение.

2. Самостоятельное решение задач.

I уровень – решить задачи № 148, 151, 155.

II уровень – решить задачу № 155 и дополнительные задачи:

Дополнительная задача 1

Начертите произвольный остроугольный треугольник ABC и постройте точку пересечения высоты BD и биссектрисы AL этого треугольника.

Дополнительная задача 2

От данного луча отложите угол, равный 1/4 данного угла.

Дополнительная задача 3

От данного луча отложите угол, который в полтора раза больше данного угла.

Дополнительная задача 4

Постройте угол, равный 135°. От его вершины A на сторонах отложите два равных отрезка AB и AC и постройте окружность, проходящую через точки A, B и C.

Построение (рис. 2.171):

Построить угол в 90° и его биссектрису. Половина угла в 90° со смежным ему углом в 90° составляют угол в 135°: $\angle BAC = 135°$. $AB = AC$. Построить середины AB и AC – точки M и N. Через эти точки провести прямые, перпендикулярные AB и AC соответственно, которые пересекутся в точке O. O – центр окружности, проходящей через точки A, B и C. Легко можно доказать, что $OB = OA = OC$.

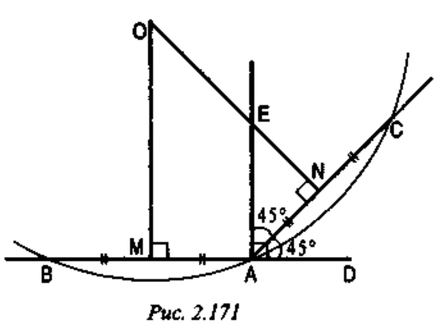


Рис. 2.171

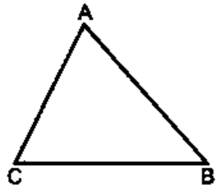


Рис. 2.172

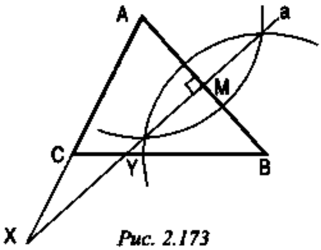


Рис. 2.173

Домашнее задание

1. Вопросы 17–21, задача № 153.

2. Решить задачи: I уровень – № 81, 82, 83 из рабочей тетради; II уровень – № 149, 152, 154 из учебника.

3. *Дополнительные задачи:*

Задача 1

Дан ΔABC (рис. 2.172). На прямых AC и BC постройте точки X и Y – такие, что $XA = XB$ и $YA = YB$.

Построение (см. рис. 2.173): Построить середину AB – точку M, через нее провести прямую a, перпендикулярную AB. $a \cap BC = Y$, $a \cap AC = X$. Легко можно доказать, что $XA = XB$ и $YA = YB$ (воспользуйтесь равенством треугольников AMY и BMY, AMX и BMX).

Задача 2

Как с помощью циркуля и линейки:

а) разделить угол в 54° на три равные части;

б) разделить угол в 35° на семь равных частей?

Построение:

а) $54° : 3 = 18°$, $54° \cdot 2 = 108°$, $108° - 90° = 18°$. Построить угол в 18° и разделить угол в 54° на три равные части.

б) $35° : 7 = 5°$, $35° \cdot 5 = 175°$, $180° - 175° = 5°$. Построить угол в 5° и разделить угол в 35° на семь равных частей.

Урок 25. Решение задач на применение признаков равенства треугольников

Цели урока:

1) закрепить и совершенствовать навыки решения задач на применение признаков равенства треугольников;
2) продолжить выработку навыков решения задач на построение с помощью циркуля и линейки.

Ход урока

I. Организационный момент

Сформулировать тему урока, сообщить цели урока.

II. Проверка домашнего задания. Повторение

1. Проверить решение дополнительных домашних задач.

(К доске вызвать учащихся, справившихся с решением задач.)

2. Решение задач по готовым чертежам (устно) рисунки подготовить на доске или на планшетах заранее.

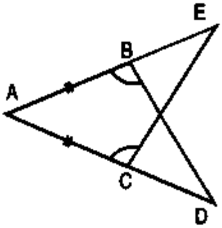


Рис. 2.174

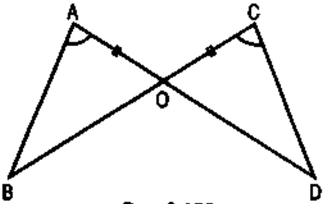


Рис. 2.175

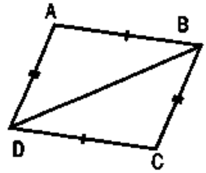


Рис. 2.176

1) **Рис.** 2.174.

а) *Дано*: $AB = AC$, $\angle ACE = \angle ABD$.

Доказать: $\Delta ACE = \Delta ABD$.

б) *Дано*: $AE = 15$ см, $EC = 10$ см, $AC = 7$ см.

Найти: стороны ΔABD.

2) Рис. 2.175.

Дано: $AO = OC$, $\angle BAO = \angle DCO$.

Доказать: $AB = CD$.

3) Рис. 2.176.

Дано: $AB = DC$, $AD = BC$, $P_{ABC} = 15$ см, $P_{ABCD} = 20$ см.

Найти: AC.

4) Рис. 2.177.

Дано: $AB = BC$, $AD = DC$, $\angle ABD = 63°$, $\angle ADB = 37°$.

Найти: $\angle CBD$, $\angle CDB$.

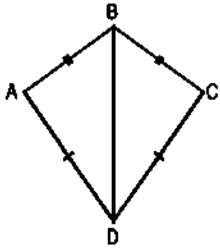


Рис. 2.177

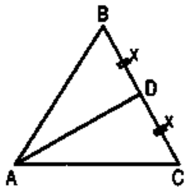


Рис. 2.178

3. Решение задач № 158, 165 (письменно в тетрадях и у доски).

Задача № 158

Дано: ΔABC – равнобедренный (см. рис. 2.178), AC – основание, $AC = 8$ см. AD – медиана. P_{ABD} больше P_{ADC} на 2 см или наоборот.

Найти: боковую сторону ΔABC.

Решение: Пусть $BD = x$ см, тогда $DC = x$ см, $AB = 2x$ см. Пусть $AD = y$ см. Рассмотрим два случая:

1) если P_{ABD} больше P_{ADC} на 2 см, то $(AB + BD + AD) - (AD + DC + AC) = 2$, то есть $(2x + x + y) - (y + x + 8) = 2$.

Откуда $x = 5$, то есть $BD = 5$ см, $AB = 10$ см.

2) если P_{ADC} больше P_{ABD} на 2 см, то $(y + x + 8) - (2x + x + y) = 2$, откуда $x = 3$, то есть $BD = 3$ см, $AB = 6$ см. (*Ответ*: 10 см или 6 см.)

Наводящие вопросы:

1) Что вы можете сказать о длинах отрезков AB, BD и DC? Чему равны AB и DC, если $BD = x$ см?

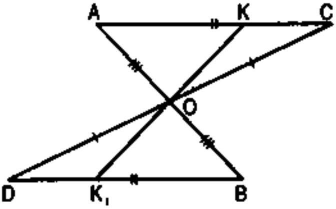


Рис. 2.179

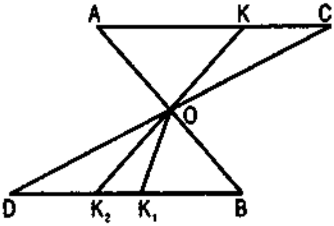


Рис. 2.180

2) По условию задачи сказано, что периметр одного треугольника больше периметра другого. Периметр какого треугольника больше? Сколько решений имеет задача?

Задача № 165 (а)

Решение (см. рис. 2.179):

1) $\Delta AOC = \Delta BOD$ по двум сторонам и углу между ними ($AO = BO$, $CO = DO$, так как O – середина AB и CD; $\angle AOC = \angle BOD$ как вертикальные). Следовательно, $\angle CAO = \angle DBO$.

2) $\Delta AKO = \Delta BK_1O$ по двум сторонам и углу между ними ($AK = BK_1$; $AO = BO$; $\angle KAO = \angle K_1BO$, так как $\angle AOC = \angle BOD$). Отсюда следует, что $OK = OK_1$.

Наводящие вопросы:

1) Чтобы $OK = OK_1$, нужно равенство треугольников, содержащих в себе отрезки OK и OK_1 в качестве своих сторон. Какие это треугольники?

2) Равны ли $\angle OAK$ и $\angle OBK_1$? Из равенства каких треугольников следует равенство углов OAK и OBK_1?

Задача № 165 (б)

Решение (см. рис. 2.180): Начертим луч OK_2 так, что точка O лежит на отрезке KK_2, тогда $\angle AOK = \angle BOK_2$ как вертикальные. Но по доказанному выше $\Delta AKO = \Delta BK_1O$, следовательно, $\angle AOK = \angle BOK_1$.

Так как $\angle AOK = \angle BOK_2$ и $\angle AOK = \angle BOK_1$, то $\angle BOK_2 = \angle BOK_1$, следовательно, луч OK_2 совпадает с лучом OK_1, то есть точки O, K и K_1 лежат на одной прямой.

Наводящий вопрос:

1) Предположим, что точка O не лежит на прямой KK_1, а лежит на прямой KK_2. Что можно сказать в этом случае об углах AOK_1, BOK_1 и BOK_2?

III. Самостоятельное решение задач

I уровень: решить задачи № 157, 159, 162.

Задача № 157

Решение: Пусть ΔABC – равнобедренный ($AB = BC$), тогда $AC = AB + 2$ см, и $AC = AB + BC - 3$ см. Но $AB = BC$, поэтому можно составить равенство: $AB + 2$ см $= 2\,AB - 3$ см, откуда $AB = 5$ см.

Тогда $BC = 5$ см, $AC = 7$ см. (*Ответ*: 5 см, 5 см, 7 см.)

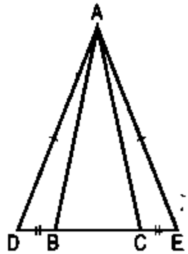


Рис. 2.181

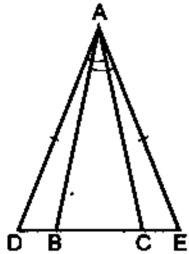


Рис. 2.182

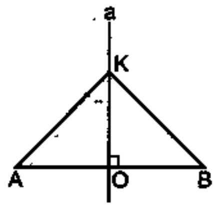


Рис. 2.183

Задача № 162 (а)

Доказательство (рис. 2.181):

1) ΔADE – равнобедренный с основанием DE, следовательно, $\angle D = \angle E$ как углы при основании равнобедренного треугольника.

2) $\Delta ADB = \Delta AEC$ по двум сторонам и углу между ними ($AD = AE$, $DB = CE$, $\angle D = \angle E$), следовательно, $AB = AC$, $\angle DAB = \angle EAC$.

3) $\angle CAD = \angle CAB + \angle DAB$, $\angle BAE = \angle EAC + \angle CAB$, но $\angle DAB = \angle EAC$, поэтому $\angle CAD = \angle BAE$. Итак, $AB = AC$, $\angle CAD = \angle BAE$.

Задача № 162 (б)

Доказательство (рис. 2.182):

1) ΔADE – равнобедренный с основанием DE, следовательно, $\angle D = \angle E$

2) $\angle DAC = \angle EAB$, но $\angle DAC = \angle DAB + \angle BAC$, $\angle EAB = \angle EAC + \angle BAC$, следовательно, $\angle DAB = \angle EAC$.

3) $\angle DAB = \angle EAC$ по стороне и прилежащим к ней углам ($AD = AE$, $\angle DAB = \angle EAC$, $\angle D = \angle E$), отсюда $AB = AC$, $DB = CE$.

II уровень: решить задачи № 157, 160, 162, 163.

Задача № 160

Доказательство (рис. 2.183):

а) Пусть K – произвольная точка прямой a. ΔAKB – равнобедренный, так как CO – медиана и высота, значит, $AB = BC$.

б) Пусть K – произвольная точка плоскости, такая, что $AK = KB$. Тогда KO – медиана, проведенная к основанию, а значит, и высота. Получаем, что CO лежит на прямой a, т.е. $C \in a$.

Задача № 163

Доказательство (рис. 2.184):

1) ΔABC – равнобедренный с основанием AC, значит, $\angle A = \angle C$.

2) $\Delta AMK = \Delta CNK$ по двум сторонам и углу между ними ($AM = CN$, так как M и N – середины боковых сторон равнобедренного треугольника; $AK = CK$, так как K – середина AC; $\angle A = \angle C$).

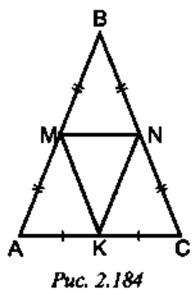


Рис. 2.184

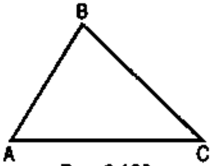


Рис. 2.185

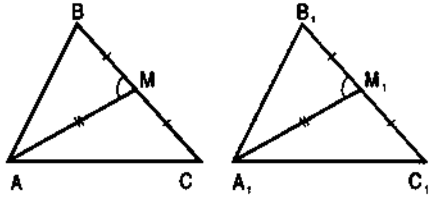


Рис. 2.186

3) Так как $\Delta AMK = \Delta CNK$, то $MK = NK$, т.е. в треугольнике MNK две стороны равны, следовательно, ΔMNK – равнобедренный.

Домашнее задание

1. Решить задачи № 156, 161, 164.
2. Дополнительная задача № 166.

Задача № 156

Решение (рис. 2.185): Пусть $AB = x$ см, тогда $BC = (x + 2)$ см, $AC = (x + 1)$ см. $P_{ABC} = 15$ см, поэтому $x + (x + 2) + (x + 1) = 15$, откуда $x = 4$.

Значит, $AB = 4$ см, $BC = 6$ см, $AC = 5$ см. (*Ответ*: $AB = 4$ см, $BC = 6$ см, $AC = 5$ см.)

Задача № 161

Доказательство (рис. 2.186):

1) $BC = B_1C_1$, M и M_1 – середины BC и B_1C_1, следовательно, $BM = MC = B_1M_1 = M_1C_1$.

2) $\Delta ABM = \Delta A_1B_1M_1$ по двум сторонам и углу между ними ($AM = A_1M_1$, $MB = M_1B_1$, $\angle AMB = \angle A_1M_1B_1$), следовательно, $AB = A_1B_1$, $\angle B = \angle B_1$.

3) $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по двум сторонам и углу между ними ($AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$).

Задача № 164

Доказательство: 1) Так как ΔABC – равносторонний, и $EB = FC = DA$, то $AE = BF = CD$, а $\angle A = \angle B = \angle C$.

2) $\Delta AED = \Delta BFE = \Delta CDF$ по двум сторонам и углу между ними ($AD = BE = FC$; $AE = BF = CD$; $\angle A = \angle B = \angle C$).

Следовательно, $MK = MN = NK$, то есть треугольник MNK – равносторонний.

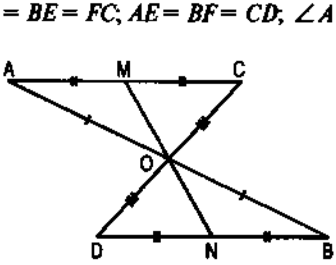


Рис. 2.187

Задача № 166

Доказательство (рис. 2.187):

1) $\Delta AOC = \Delta BOD$ ($AO = BO$, $OC = OD$, $\angle AOC = \angle BOD$). Отсюда $\angle A = \angle B$, $AC = BD$.

2) Так как $AC = BD$, M и N – середины AC и BD, то $AM = BN$.

3) $\Delta AMO = \Delta BNO$ ($AM = BN$, $AO = BO$, $\angle A = \angle B$). Отсюда $MO = NO$.

4) Докажем теперь, что точки M, N, O лежат на одной прямой. Предположим, что это не так. Но в этом случае найдется луч OL, являющийся продолжением луча OM. Тогда $\angle AOM = \angle BOL$ как вертикальные. Но $\angle AOM = \angle BON$ из равенства треугольников AOM и BON.

Так как $\angle AOM = \angle BON$ и $\angle AOM = \angle BOL$, то $\angle BON = \angle BOL$. Следовательно, лучи ON и OL совпадают.

Значит, точки M, N, O лежат на одной прямой, а так как $MO = NO$, то O – середина отрезка MN.

Урок 26. Решение задач

Цели урока:

1) совершенствование навыков решения задач;
2) отработка навыков решения задач на построение с помощью циркуля и линейки.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели и задачи урока.

II. Актуализация знаний учащихся

1. Устно решить задачи № 167, 169, 185 (рисунки к задачам заранее заготовить на доске или на плакате).

2. Письменно решить задачу № 171.

(Дать учащимся на обдумывание 2—3 минуты, затем выслушать предложения по решению задачи, выполнить на доске рисунок, составить план решения задачи. Полное решение учащиеся самостоятельно записывают в тетрадях.)

Доказательство (рис. 2.188):

1) $\Delta ABC = \Delta CDA$ по двум сторонам и углу между ними ($BC = AD$, AC – общая сторона, $\angle ACB = \angle CAD$ по условию задачи), следовательно, $\angle B = \angle D$, $AB = DC$, $\angle BAC = \angle DCA$.

2) Так как $\angle BAC = \angle DCA$, а $\angle BAC = \angle BAO + \angle OAC$, $\angle DCA = \angle DCO + \angle OCA$ и $\angle OAC = \angle OCA$, то $\angle BAO = \angle DCO$.

3) $\Delta ABO = \Delta CDO$ по стороне и прилежащим к ней углам ($AB = DC$, $\angle B = \angle D$, $\angle BAO = \angle DCO$).

III. Самостоятельная работа

Цель работы – проверить готовность учащихся к предстоящей контрольной работе, выявить пробелы в знаниях учащихся.

В конце урока учащиеся сдают тетради на проверку учителю.

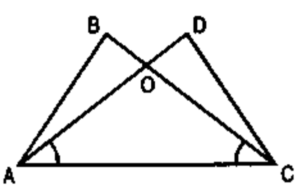


Рис. 2.188

I уровень

Вариант I

1. Рис. 2.189.

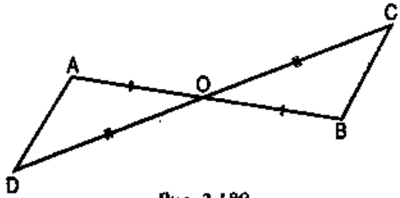


Рис. 2.189

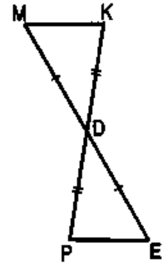


Рис. 2.190

Дано: O – середина AB, O – середина DC. $\angle OAD = 112°$, $BC = 7$ см.
Найти: $\angle OBC$, AD.

2. Луч AD – биссектриса угла A. На сторонах угла A отмечены точки B и C так, что $\angle ADC = \angle ADB$.
Докажите, что $AB = AC$.

3. Начертите равнобедренный треугольник ABC с основанием BC. С помощью циркуля и линейки проведите медиану BB_1 к боковой стороне AC.

Вариант II

1. *Дано*: $MD = DE$, $KD = DP$, $\angle MKD = 63°$, $DM = 4$ см. (рис. 2.190).
Найти: $\angle DPE$, DE.

2. На сторонах угла D отмечены точки M и K так, что $DM = DK$. Точка P лежит внутри угла D, и $PK = PM$.
Докажите, что луч DP – биссектриса угла MDK.

3. Начертите равнобедренный ΔABC с основанием AC и острым углом B. С помощью циркуля и линейки проведите высоту из вершины A.

II уровень

Вариант I

1. Известно, что в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$. На сторонах BC и B_1C_1 отмечены точки K и K_1, такие, что $CK = C_1K_1$.
Докажите, что $\Delta ABK = \Delta A_1B_1K_1$.

2. В равнобедренном ΔABC с основанием AC биссектрисы AA_1 и CC_1 пересекаются в точке O.
Докажите, что прямая BO перпендикулярна к прямой AC.

Доказательство (см. рис. 2.191):

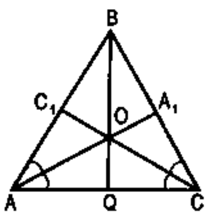


Рис. 2.191

1) $\Delta AA_1C = \Delta CC_1A$ по стороне и прилежащим к ней углам (AC – общая сторона; $\angle A_1AC = \angle C_1CA$, так как AA_1 и CC_1 – биссектрисы равных углов; $\angle C_1AC = \angle A_1CA$ как углы при основании равнобедренного треугольника), следовательно, $\angle OA_1C = \angle OC_1A$, $CA_1 = AC_1$.

2) $\Delta AC_1O = \Delta CA_1O$ по стороне и прилежащим к ней углам ($AC_1 = CA_1$; $\angle C_1AO = \angle A_1CO$; $\angle OC_1A = \angle OA_1C$).

Следовательно, $C_1O = A_1C$.

3) $\Delta BC_1O = \Delta BA_1O$ по трем сторонам (BO – общая сторона; $C_1O = A_1O$; $BC_1 = BA_1$, так как $AB = BC$ и $AC_1 = CA_1$), следовательно, $\angle C_1BO = \angle A_1BO$, то есть BO – биссектриса угла C_1BA_1.

4) Если BO – биссектриса угла C_1BA_1, то BQ – биссектриса ΔABC, и по свойству биссектрисы равнобедренного треугольника BQ – высота, то есть $BQ \perp AC$.

3. Начертите равнобедренный тупоугольный ΔABC с основанием BC и тупым углом A. С помощью циркуля и линейки проведите:

а) высоту треугольника ABC из вершины угла B;

б) медиану треугольника ABC к стороне AB;

в) биссектрису треугольника ABC из угла A.

Вариант II

1. Известно, что в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle B = \angle B_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$. На сторонах AC и A_1C_1 отмечены точки D и D_1 так, что $AD = A_1D_1$.

Докажите, что $\Delta BDC = \Delta B_1D_1C_1$.

2. В равнобедренном ΔABC с основанием BC медианы BD и CE, проведенные к боковым сторонам, пересекаются в точке M.

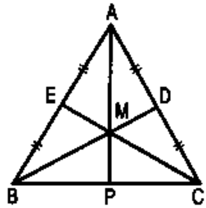


Рис. 2.192

Докажите, что прямые AM и BC перпендикулярны.

Доказательство (см. рис. 2.192):

1) $\Delta BDC = \Delta CEB$ по двум сторонам и углу между ними (BC – общая сторона; $BE = DC$, так как $DC = 1/2\ AC$, $BE = 1/2\ AB$, а $AC = AB$ как боковые стороны равнобедренного треугольника; $\angle BCD = \angle CBE$ как углы при основании равнобедренного треугольника). Следовательно, $\angle BDC = \angle CEB$ и $\angle DBC = \angle ECB$.

2) $\angle EBM = \angle EBC - \angle DBC$, $\angle DCM = \angle DCB - \angle ECB$. Так как $\angle EBC = \angle DCB$, а $\angle DBC = \angle ECB$, то $\angle EBM = \angle DCM$.

3) $\Delta EBM = \Delta DCM$ по стороне и прилежащим к ней углам ($BE = CD$; $\angle EBM = \angle DCM$; $\angle BEM = \angle CDM$), значит, $EM = DM$.

4) $\Delta EMA = \Delta DMA$ по трем сторонам ($AE = AD$, $EM = DM$, AM – общая сторона), следовательно, $\angle EAM = \angle DAM$, что означает, что AM – биссектриса $\angle BAC$, а AP – биссектриса и высота ΔABC, то есть $AP \perp BC$, и $AM \perp BC$.

3. Начертите равнобедренный остроугольный ΔMNK с основанием MK и острым углом N. С помощью циркуля и линейки проведите:

а) медиану треугольника MNK к стороне MN;

б) биссектрису треугольника MNK из угла K;

в) высоту треугольника MNK из вершины M.

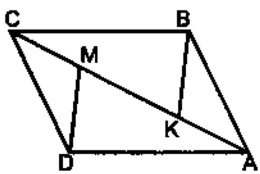


Рис. 2.193

III уровень

Вариант I

1. *Дано*: $AB = CD$, $BK = DM$, $AM = CK$ (рис. 2.193).

Доказать: $\Delta ADM = \Delta CBK$.

Доказательство:

1) $AM = CK$, но $AM = AK + KM$, $CK = CM + MK$, значит, $CM = AK$.

2) $\Delta\ DCM = \Delta\ BAK$ по трем сторонам ($CD = AB$, $DM = BK$, $CM = AK$), следовательно, $\angle\ CMD = \angle\ AKB$.

3) $\angle\ CMD = 180° - \angle\ AMD$, $\angle\ AKB = 180° - \angle\ CKB$, но $\angle\ CMD = \angle\ AKB$, значит, $\angle\ AMD = \angle\ CKB$.

4) $\Delta\ ADM = \Delta\ CBK$ по двум сторонам и углу между ними ($DM = BK$, $AM = CK$, $\angle\ AMD = \angle\ CKB$).

2. В равнобедренном $\Delta\ ABC$ на основании AC взяты точки D и E так, что $AD = CE$.

Докажите, что $\Delta\ ABE = \Delta\ CBD$.

3. В равнобедренном $\Delta\ ABC$ на боковых сторонах AB и CB взяты соответственно точки M и N так, что $BM = BN$. Отрезки AN и CM пересекаются в точке E.

Докажите, что EB – биссектриса угла MEN.

Вариант II

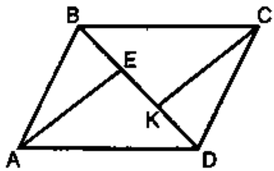


Рис. 2.194

1. *Дано*: $BE = EK = KD$, $AE = CK$, $BC = AD$ (рис. 2.194).

Доказать: $AB = CD$.

2. В равнобедренном $\Delta\ ABC$ на боковых сторонах AB и CB взяты соответственно точки D и E так, что $AD = CE$. Отрезки AE и CD пересекаются в точке O.

Докажите, что BO – биссектриса угла ABC.

3. В равнобедренном $\Delta\ ABC$ на основании AC взяты точки M и N так, что $\angle\ ABM = \angle\ CBN$.

Докажите, что $\Delta\ ABN = \Delta\ CBM$.

Домашнее задание

1. Решить задачи № 168, 170, 172.
2. Дополнительная задача – № 174.

Урок 27. Решение задач. Подготовка к контрольной работе

Цели урока:

1) систематизировать знания по темам второй главы, устранить пробелы в знаниях учащихся;
2) подготовить учащихся к контрольной работе.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, поставить перед учащимися цели на урок.

II. Решение задач на построение

На предыдущих двух уроках большинство задач было направлено на закрепление знаний, умений и навыков по темам «Признаки равенства треугольников» и «Равнобедренный треугольник». Первую половину настоящего урока отведем на закрепление темы «Задачи на построение».

Решить задачи № 181, 183 (фронтальная работа с классом).

Задача № 181

Дано: радиус окружности; точки A и B.

Построить: окружность с радиусом R, проходящую через точки A и B.

Наводящие вопросы:

1) Что нужно знать для построения искомой окружности? (***Центр; радиус нам дан.***)
2) Как относительно друг друга расположены центр окружности (пусть это будет точка O) и заданные точки A и B? (***Они образуют равнобедренный треугольник AOB с основанием AB и боковой стороной, равной заданному радиусу.***)
3) Составьте план построения искомой окружности.

План построения:

1) Построить равнобедренный $\Delta\ AOB$ с основанием AB и боковой стороной AO, равной заданному радиусу.

2) Построить окружность с центром в точке O и радиусом R. Полученная окружность – искомая).

Далее учащимся предлагается самостоятельно построить искомую окружность.

Задача № 183

Построение:

1) Соединим точки A и B отрезком AB.

2) Так как вершина C лежит на окружности, а $AC = PQ$, то начертим окружность с центром в точке A и радиусом, равным PQ.

а) Если окружность пересекает данную окружность в двух точках (C_1 и C_2), то искомых треугольников также будет два: $\Delta\ ABC_1$ и $\Delta\ ABC_2$.
б) Если построенная окружность имеет одну общую точку с заданной окружностью, то эта точка и будет точкой C, и значит, можно построить один $\Delta\ ABC$.
в) Если окружности не пересекаются, то в этом случае задача не имеет решения.

III. Анализ ошибок самостоятельной работы

Учащимся, допустившим серьезные ошибки при выполнении самостоятельной работы, можно назначить консультантов или предложить разобраться с помощью готового решения (см. урок 26).

Учащиеся, успешно справившиеся с самостоятельной работой, могут решать задачи следующего уровня, а также задачи № 175, 177, 178, 179 учебника.

Задача № 175

Решение:

1) $\Delta\ OAD = \Delta\ OBC$ по двум сторонам и углу между ними ($OD = OC$, $OB = OA$, $\angle\ O$ – общий), следовательно, $\angle\ ODA = \angle\ OCB$.

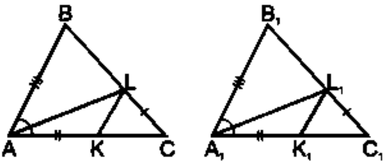


Рис. 2.195

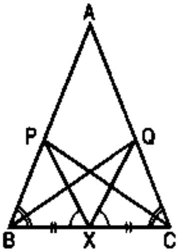


Рис. 2.196

2) $\angle BDE = \angle ACE$, $\angle BED = \angle AEC$, значит, $\angle EBD = 180° - \angle E - \angle D = 180° - \angle E - \angle C = \angle EAC$. $\Delta BED = \Delta AEC$ по стороне и прилежащим к ней углам. Отсюда $BE = AE$.

3) $\Delta AOE = \Delta BOE$ по трем сторонам. Значит, $\angle BOE = \angle EOA$, то есть OE – биссектриса $\angle YOX$.

Построение: Чтобы построить биссектрису угла, нужно отложить на его сторонах две пары равных отрезков и соединить концы этих отрезков так, чтобы они пересекались. Луч, проходящий через вершину угла и точку пересечения полученных отрезков, является биссектрисой угла.

Задача № 177

Доказательство (рис. 2.195): $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по двум сторонам и углу между ними ($AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$).

а) $\Delta LKC = \Delta L_1K_1C_1$ по двум сторонам и углу между ними ($LC = L_1C_1$ по условию, $\angle C = \angle C_1$ из равенства треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, $KC = AC - AK = A_1C_1 - A_1K_1 = K_1C_1$). Поэтому $KL = K_1L_1$.

б) $\Delta LCA = \Delta L_1C_1A_1$ по двум сторонам и углу между ними ($LC = L_1C_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$), значит, $AL = A_1L_1$.

Задача № 178

Доказательство: Пусть точка B лежит на отрезке AC. Допустим, что $AD = BD = CD$. Тогда ΔADC, ΔADB и ΔBDC – равнобедренные, поэтому $\angle A = \angle C$, $\angle A = \angle ABD$, $\angle C = \angle DBC$. Следовательно, $\angle ABD = \angle CBD$. Но эти углы смежные, а так как они равны, то каждый из них равен 90°.

Итак, $\angle A$ и $\angle ABD$ – прямые углы, то есть прямые AD и BD перпендикулярны к прямой AC. Но это невозможно, так как они пересекаются в точке D.

Значит, наше предположение, что $AD = BD = CD$, неверно, поэтому хотя бы два из этих отрезков не равны друг другу.

Задача № 179

Доказательство (см. рис. 2.196): $\Delta BPX = \Delta CQX$ по стороне и прилежащим к ней углам ($BX = CX$ по условию, $\angle B = \angle C$ как углы при основании равнобедренного ΔABC, $\angle PXB = \angle QXC$ по условию).

Отсюда $BP = CQ$, и тогда $\Delta BPC = \Delta CQB$ по двум сторонам и углу между ними ($BP = CQ$, BC – общая сторона, $\angle B = \angle C$). Значит, $BQ = CP$.

Домашнее задание

1. Решить задачи № 180, 182, 184.
2. Дополнительная задача: № 176.

Урок 28. Контрольная работа №2 по теме «Треугольники» (см. Приложение 1)

Урок 29. Работа над ошибками

Цели урока:

1) устранение пробелов в знаниях учащихся;
2) совершенствование навыков решения задач по теме «Треугольники».

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Подведение итогов контрольной работы

1. Сообщить учащимся общий анализ по итогам контрольной работы.
2. Наметить план работы над ошибками.

III. Работа над ошибками

I уровень

Учащиеся работают под руководством учителя следующим образом:

1) разобрать план решения задач контрольной работы устно по заранее подготовленным рисункам;

2) самостоятельное решение тех задач, с которыми ученик не справился;

3) решение задач контрольной работы II уровня с помощью готовых подсказок.

Рисунки к задачам I уровня:
Вариант I

1. Рис. 2.199.

Найти: P_{CAO}.

2. Рис. 2.200.
Доказать: $\Delta\ BKD = \Delta\ BMD$.

3. Рис. 2.201.
$OA = OB = 1/2\ PQ$.

4. Рис. 2.202.
а) $\Delta\ AMB = \Delta\ AKB$;
б) $\angle AKM = \angle BMK$;
в) $\Delta\ MKA = \Delta\ KMB$;
г) $\angle AMB = \angle KBM$.

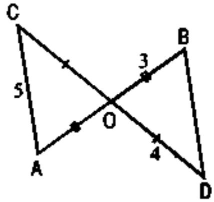


Рис. 2.199

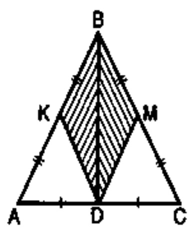


Рис. 2.200

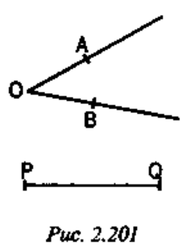


Рис. 2.201

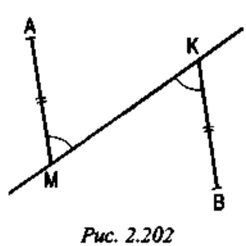


Рис. 2.202

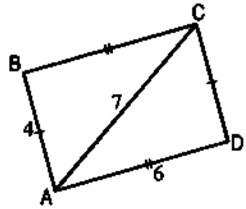


Рис. 2.203

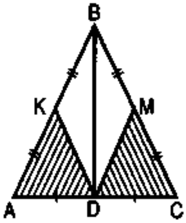


Рис. 2.204

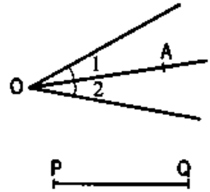


Рис. 2.205

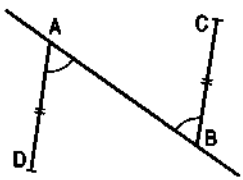


Рис. 2.206

Вариант II

1. Рис. 2.203.

Найти: P_{ADC}.

2. Рис. 2.204.

Доказать: $\Delta AKD = \Delta CMD$.

3. Рис. 2.205.

$OA = PQ$, $\angle 1 = \angle 2$.

4. Рис. 2.206.

а) $\Delta CAD = \Delta BDA$; б) $\angle DBA = \angle CAB$;

в) $\angle BAD = \angle BAC$; г) $\angle ADB = \angle BCA$.

II уровень

Учащиеся работают самостоятельно следующим образом:

1) найти свои ошибки с помощью готовых подсказок для решения задач, решить неверно решенные задачи;

2) решить задачи контрольной работы III уровня, используя предоставленные указания и ответы к задачам.

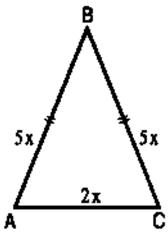


Рис. 2.207

Подсказки для решения задач II уровня:

Вариант I

1. Рис. 2.207.

$AB : AC = 5 : 2$, $P_{ABC} = 48$ см, $P_{ABC} = AB + BC + AC$.

(*Ответ*: $AB = AC = 20$ см, $AC = 8$ см.)

2. С помощью циркуля и линейки:

1) разделите данный отрезок на четыре равные части;

2) постройте окружность с центром в вершине угла и радиусом, равным четверти данного отрезка.

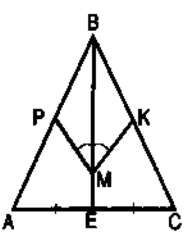


Рис. 2.208

3. Рис. 2.208.

а) $\Delta BPM = \Delta BKM$ по стороне и прилежащим к ней углам (докажите, что $\angle PBM = \angle KBM$).

б) Докажите, что ΔPBK – равнобедренный с основанием PK, а BD – высота ΔPBK (D – точка пересечения PK и BM).

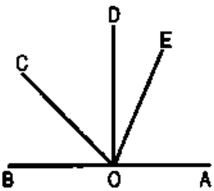


Рис. 2.209

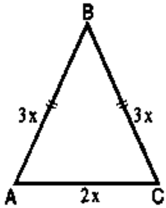


Рис. 2.210

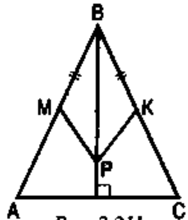


Рис. 2.211

4. Рис. 2.209.

1) $\angle BOD = 90^\circ$ ($DO \perp AB$).

2) CO – биссектриса $\angle BOD$, тогда $\angle COD = 45^\circ$, $\angle DOA = 90^\circ$, а $\angle COA = 135^\circ$.

3) $135^\circ : 2 = 67^\circ 30'$. OE – биссектриса $\angle COA$, $\angle AOE = 67^\circ 30'$.

II вариант

1. Рис. 2.210. $AC : AB = 2 : 3$, $P_{ABC} = 56$ см, $P_{ABC} = AB + BC + AC$. (*Ответ*: $AB = BC = 21$ см, $AC = 14$ см.)

2. С помощью циркуля и линейки:

1) разделите данный отрезок на четыре равные части, возьми три части;

2) постройте окружность с центром в вершине данного угла и радиусом, равным трем четвертям данного отрезка.

3. Рис. 2.211.

а) $\Delta BMP = \Delta BKP$ по двум сторонам и углу между ними (докажи, что $\angle MBP = \angle KBP$).

б) Докажите, что ΔMKP – равнобедренный с основанием MK.

4. Рис. 2.212.

1) $\angle AOB = 90^\circ$.

2) CO – биссектриса $\angle BOA$. $\angle COA = 45^\circ$.

3) DO – биссектриса $\angle COA$. $\angle DOA = 22^\circ 30'$.

4) PO – биссектриса $\angle DOA$. $\angle POA = 11^\circ 15'$.

III уровень

Учащиеся работают самостоятельно следующим образом:

1) используя предоставленные указания и ответы к задачам, найти свои ошибки и правильно решить все задачи;

2) предложить учащимся для самостоятельного решения дополнительные задачи.

Ответы и указания к задачам III уровня:

Вариант I

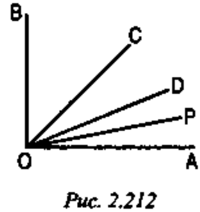


Рис. 2.212

1. *Ответ*: 6 см, 6 см, 4 см.

2. а) Докажите, что $\Delta BOA = \Delta BOC$.

б) Докажите, что BO – биссектриса и медиана ΔABC.

3. *I способ:* $180^\circ - 54^\circ \cdot 3 = 18^\circ$.

II способ: $54^\circ \cdot 2 - 90^\circ = 18^\circ$.

Вариант II

1. *Ответ*: 8 см, 8 см, 4 см.
2. а) Докажите, что $\Delta\ AMP = \Delta\ CKP$, BP – биссектриса $\angle\ MBK$.
   б) Докажите, что $\Delta\ MPK$ – равнобедренный, а PE – его биссектриса и высота ($E = MK \cap BP$).
3. $34° \cdot 3 - 90° = 12°$.

Домашнее задание

Решить любые три дополнительные задачи:

Задача 1

В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведены медианы AE и CD.

Докажите, что:

а) $\Delta\ ABE = \Delta\ CBD$;

б) $\Delta\ DOE$ и $\Delta\ AOC$ – равнобедренные, где O – точка пересечения AE и CD;

в) OB – биссектриса $\angle\ DOE$.

Задача 2

В равнобедренном $\Delta\ ABC$ с основанием AC на сторонах AB и BC отмечены соответственно точки M и N так, что $\angle\ ACM = \angle\ CAN$.

Докажите, что:

а) $\Delta\ MBN$ – равнобедренный;

б) $BO \perp MN$, где O – точка пересечения AN и CM.

Задача 3

Треугольники ABC и DEF равны, и оба – равнобедренные.

Найти периметр $\Delta\ ABC$, если $DE = 4$ см, $EF = 5$ см.

Задача 4

Дано: $AB = AM$, $AC = AK$, $\angle\ BAK = \angle\ CAM$ (рис. 2.213).

Перечислите все пары равных треугольников с вершинами в точках A, B, K, C, M.

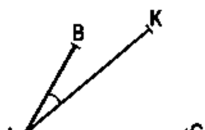


Рис. 2.213

Задача 5

На боковых сторонах равнобедренного треугольника во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники.

Докажите, что отрезки, соединяющие вершины равносторонних треугольников (отличные от вершин равнобедренного) с серединой основания равнобедренного треугольника, равны между собой.

Задача 6

Докажите, что если у четырехугольника все стороны и все углы равны, то его диагонали равны и перпендикулярны.

Задача 7

Три черепахи находятся в точках A, B и C, являющихся вершинами равностороннего треугольника. Они одновременно с одинаковой скоростью начинают ползти.

Черепаха, находившаяся в A, ползет по прямой AB в направлении к B.

Черепаха из B ползет в C, черепаха из C ползет в A.

Докажите, что во все моменты времени черепахи располагаются в вершинах равностороннего треугольника.

Задача 8

На рис. 2.214 изображена треугольная пирамида с вершинами A, B, C и D.

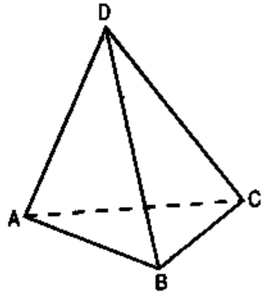


Рис. 2.214

Докажите, что все грани этой пирамиды являются равными треугольниками, если:

а) $AB = CD$, $AC = BD$, $AD = BC$;

б) $AB = CD$, $AC = BD$, $\angle ABD = \angle BDC$;

в) $AB = CD$, $\angle ABD = \angle CAB$, $\angle DAB = \angle ABC$;

г) $\angle ABD = \angle BDC$, $\angle ADB = \angle CBD$, $\angle ADC = \angle BAD$.

ГЛАВА III

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ (уроки 30–42)

Признаки параллельности прямых. Аксиома параллельных прямых. Свойства параллельных прямых.

Основная цель – дать систематические сведения о параллельности прямых; ввести аксиому параллельных прямых.

Знание признаков параллельности прямых, свойств углов при параллельных прямых и секущей находят широкое применение в дальнейшем курсе геометрии при изучении четырехугольников, подобия треугольников, а также в курсе стереометрии. Поэтому в ходе решения задач следует уделить значительное внимание формированию умений доказывать параллельность прямых с использованием соответствующих признаков, находить равные углы при параллельных прямых и секущей.

На изучение отведено 13 часов.

Урок 30. Признаки параллельности прямых

Цели урока:

1) повторить понятие параллельных прямых;
2) ввести понятие накрест лежащих односторонних и соответственных углов;
3) рассмотреть признаки параллельности двух прямых;
4) научить учащихся решать задачи на применение признаков параллельности двух прямых.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока и поставить цели.

II. Решение тестовых заданий с последующим обсуждением

Учащиеся решают задания самостоятельно. Важно подчеркнуть, что за данный тест оценки в журнал выставлены не будут, что обеспечит практически полную самостоятельность учащихся при выполнении задания.

1. Выбрать рисунки с пересекающимися прямыми.

а) рис. 3.1 а; б) рис. 3.1 б; в) рис. 3.1 в.

2. Завершить высказывания, выбрав нужный пункт:

Пересекающиеся прямые имеют...

а) на чертеже одну общую точку;

б) одну общую точку.

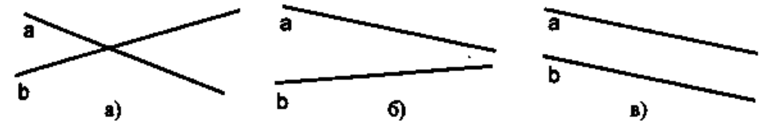


Рис. 3.1

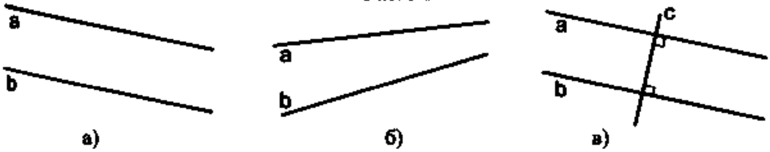


Рис. 3.2

3. Указать номера рисунков, на которых изображены параллельные прямые.

а) рис. 3.2 а; б) рис. 3.2 б; в) рис. 3.2 в.

4. Указать неправильную концовку определения:

Две прямые на плоскости называются параллельными...

а) если они находятся на постоянном расстоянии друг от друга;

б) если они не пересекаются на плоскости;

в) если они обе перпендикулярны к третьей прямой;

г) если они не пересекаются на чертеже.

5) Указать рисунки, на которых приведены параллельные отрезки.

а) рис. 3.3 а; б) рис. 3.3 б;

в) рис. 3.3 в; г) рис. 3.3 г.

6) Указать правильную концовку определения:

Два отрезка называются параллельными, если они...

а) оба перпендикулярны третьей прямой;

б) лежат на параллельных прямых;

в) имеют одинаковое расстояние между концами;

г) не пересекаются на плоскости.

7) Указать рисунки, на которых приведены параллельные лучи.

а) рис. 3.4 а; б) рис. 3.4 б;

в) рис. 3.4 в; г) рис. 3.4 г.

Проверка ответов теста

(Учитель называет номер задания и просит 2–3 учеников назвать вариант ответа. В случае разных ответов идет обсуждение задания.)

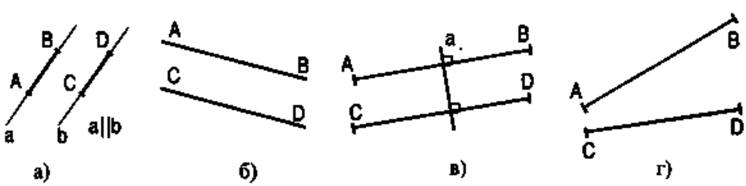


Рис. 3.3

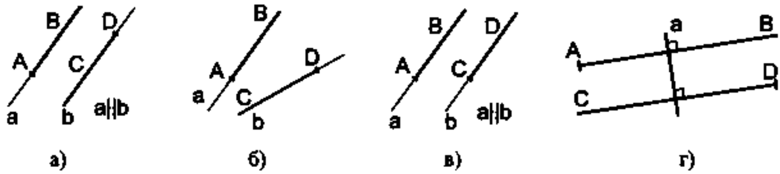


Рис. 3.4

Ответы теста:

1. а, б; 2. б; 3. в; 4. г;
5. а,в; 6. б; 7. а, в, г.

III. Изучение нового материала

– Начертите прямые a и b и прямую c так, что a и b пересекаются с прямой c.

– Сколько неразвернутых углов изображено на рисунке 3.5?

– Запишите в тетрадях:

c – ***секущая*** по отношению к прямым a и b.

$\angle 3$ и $\angle 5$; $\angle 4$ и $\angle 6$ – ***накрест лежащие*** углы.

$\angle 4$ и $\angle 5$; $\angle 3$ и $\angle 6$ – ***односторонние*** углы.

$\angle 1$ и $\angle 5$; $\angle 2$ и $\angle 6$; $\angle 4$ и $\angle 8$; $\angle 3$ и $\angle 7$ – ***соответственные*** углы.

Упражнения на закрепление углов, полученных при пересечении двух прямых секущей (рис. 3.6):

– Назовите накрест лежашие углы при прямых a и b и секущей c.

– Назовите односторонние углы при прямых b и c и секущей a.

– Назовите соответственные углы при прямых a и c и секущей b.

Дано: $\angle 4 = \angle 5$ (рис. 3.7).

Докажите: $\angle 3 = \angle 6$; $\angle 3 = \angle 7$; $\angle 6 = \angle 2$; $\angle 4 + \angle 6 = 180°$; $\angle 5 + \angle 2 = 180°$.

Доказательство признаков параллельности прямых

1) Признак параллельности прямых, использующий накрест лежащие углы, можно доказать по учебнику.

2) Признаки параллельности прямых, использующие односторонние углы и соответственные углы, можно предложить учащимся в виде задач на доказательство:

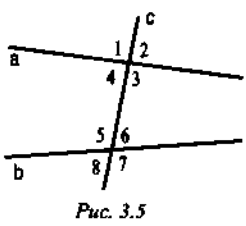


Рис. 3.5

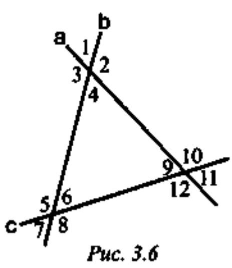


Рис. 3.6

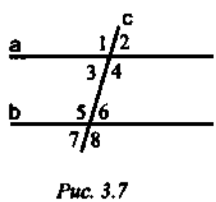


Рис. 3.7

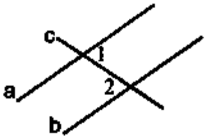


Рис. 3.8

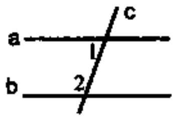


Рис. 3.9

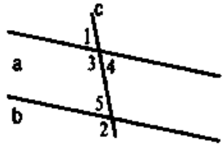


Рис. 3.10

Задача 1 (Вариант I)

Две прямые пересечены третьей так, что соответственные углы равны. Докажите, что прямые параллельны.

Дано: $\angle 1 = \angle 2$, $a \cap c$, $b \cap c$.

Доказать: $a \parallel b$.

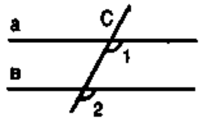


Рис. к задаче 1

Задача 2 (Вариант II)

Две прямые пересечены третьей так, что сумма односторонних углов равна 180°. Докажите, что прямые параллельны.

Дано: $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, $a \cap c$, $b \cap c$.

Доказать: $a \parallel b$.

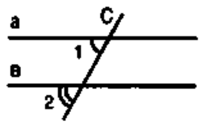


Рис. к задаче 2

Решение задач 1 и 2 можно проверить следующим образом: на доске подготовить рисунки и предложить устно рассказать у доски решения задач желающих учащихся.

После решения задач можно попросить учащихся сформулировать признаки параллельности прямых, использующие соответственные и односторонние углы.

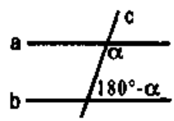


Рис. 3.11

IV. Закрепление изученного

Задачи на закрепление признаков параллельности прямых на готовых чертежах:

1. Рис. 3.8. $\angle 1 = 32°$, $\angle 2 = 32°$.
Доказать: $a \parallel b$.
2. Рис. 3.9. $\angle 1 = 48°$, $\angle 2 = 132°$.
Доказать: $a \parallel b$.
3. Рис. 3.10. $\angle 1 = 47°$, $\angle 2 = 133°$.
Доказать: $a \parallel b$.
4. Рис. 3.11.
Доказать: $a \parallel b$.
5. Рис. 3.12.
Доказать: $AB \parallel CD$.
6. Рис. 3.13.
Доказать: $PE \parallel MK$.
7. Рис. 3.14.
Доказать: $AB \parallel CD$; $AD \parallel BC$.

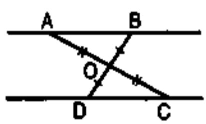


Рис. 3.12

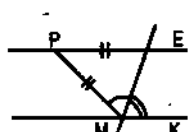


Рис. 3.13

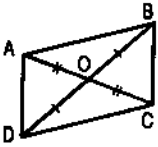


Рис. 3.14

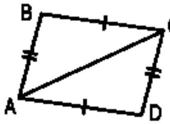


Рис. 3.15

8. Рис. 3.15.

Доказать: $AB \parallel CD$; $BC \parallel AD$.

Задачи 1–4 лучше решить устно.

Задачу 5 можно решить письменно, записав образец оформления на доске.

Задачи 6–8 можно предложить учащимся для самостоятельного решения.

Запись решения задачи 5 на доске и в тетрадях учащихся может быть следующей:

Дано: $AC \cap BD = O$; $AO = CO$, $BO = DO$.

Доказать: $AB \parallel CD$.

Доказательство: $\Delta AOB = \Delta COD$ по двум сторонам и углу между ними ($AO = CO$, $BO = DO$ по условию задачи; $\angle AOB = \angle COD$ как вертикальные).

Так как $\Delta AOB = \Delta COD$, то $\angle OAB = \angle OCD$.

Углы OAB и OCD – накрест лежащие при прямых AB и CD и секущей AC и они равны, значит, $AB \parallel CD$, что и требовалось доказать.

Домашнее задание

1. § 24, 25, вопросы 1–5.
2. Решить задачи №186, 187 учебника, №84–87 из рабочей тетради.

Урок 31. Признаки параллельности прямых

Цели урока:

1) совершенствование навыков доказательства теорем;
2) закрепление навыков решения задач на применение признаков параллельности прямых.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

Теоретический опрос

– Доказать признак параллельности прямых, использующий накрест лежащие углы (это задание лучше дать наиболее подготовленному ученику и его ответ заслушать всем классом с целью наиболее основательного усвоения принципа доказательства).

– Доказать признак параллельности прямых, использующий:

а) односторонние углы;

б) соответственные углы.

(Каждый признак можно предложить доказать 2–3 ученикам письменно на отдельных листах, а затем индивидуально проверить. Менее подготовленным учащимся предложить решить задачи №91, 96 из рабочей тетради.)

Тест на проверку теоретических знаний с последующей проверкой

1. Рис. 3.16. Выберите верные утверждения:

а) $\angle 1$ и $\angle 3$ – вертикальные;
б) $\angle 5$ и $\angle 1$ – односторонние;
в) $\angle 7$ и $\angle 6$ – соответственные;
г) $\angle 5$ и $\angle 3$ – накрест лежащие;
д) $\angle 2$ и $\angle 4$ – смежные;
е) $\angle 7$ и $\angle 1$ – накрест лежащие;
ж) $\angle 3$ и $\angle 7$ – односторонние.

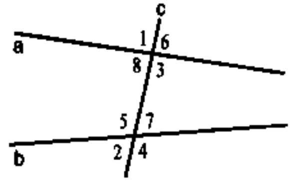


Рис. 3.16

2. Выберите верные утверждения (см. рис. 3.16): Прямые *a* и *b* параллельны, если:

а) $\angle 1 = \angle 3$; б) $\angle 8 + \angle 5 = 180°$;
в) $\angle 7 = \angle 6$; г) $\angle 8 + \angle 3 = 180°$;
д) $\angle 5 = \angle 3$; е) $\angle 2 = \angle 6$;
ж) $\angle 1 + \angle 4 = 180°$; з) $\angle 1 + \angle 7 = 180°$.

3. Указать продолжения высказывания, не соответствующие действительности.

Прямые не параллельны, если при пересечении двух прямых секущей:

а) сумма односторонних углов не равна 180°;
б) сумма соответственных углов равна 180°;
в) вертикальные углы не равны;
г) накрест лежащие углы не равны;
д) сумма смежных углов не равна 180°;
е) соответственные углы не равны.

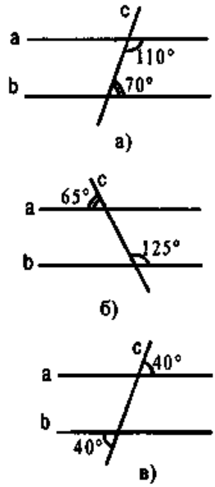


Рис. 3.17

Ответы к тестовым заданиям:

1 – а), в), г), д), ж);
2 – б), в), д), е), з);
3 – а), г), е).

Решение задач по готовым чертежам *(устно)*, рисунки к задачам подготовить на доске заранее. В это же время предложить 2–3 ученикам решить задачи №90, 92 из рабочей тетради).

1. Параллельны ли прямые *a* и *b* (рис. 3.17)? Почему?

2. Рис. 3.18. *Доказать: $AB \parallel DE$.*

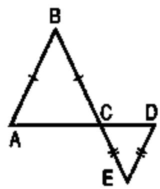


Рис. 3.18

3. Рис. 3.19. *Доказать: $AB \parallel MN$.*

III. Решение задач

Задачи 1–5 решают более подготовленные учащиеся самостоятельно, в конце урока они сдают тетради на проверку учителю. Остальные учащиеся работают в рабочих тетрадях: №93, 97 решают вместе с учителем, №94, 95 – самостоятельно.

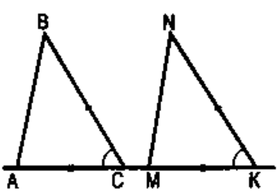


Рис. 3.19

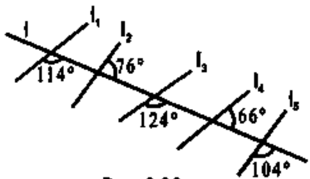


Рис. 3.20

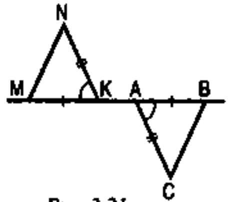


Рис. 3.21

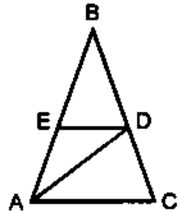


Рис. 3.22

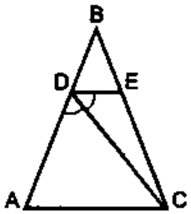


Рис. 3.23

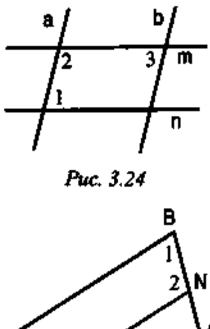


Рис. 3.24

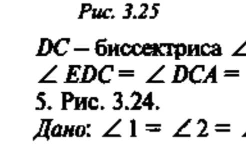


Рис. 3.25

1. Рис. 3.20. По данным рисунка определите, есть ли там параллельные прямые. Ответ обоснуйте. (*Ответ*: $l_1 \parallel l_4$, $l_2 \parallel l_5$.)

2. Рис. 3.21.

Докажите: $NK \parallel AC$, $MN \parallel BC$.

Доказательство: $\Delta MNK = \Delta BCA$ по двум сторонам и углу между ними.

$\angle K = \angle A$, следовательно, $NK = AC$.

$\angle M = \angle B$, следовательно, $MN \parallel BC$.

3. Рис. 3.22.

Дано: $AB = BC$, $ED = AE$, $\angle C = 80°$, $\angle DAC = 40°$.

Доказать: $ED \parallel AC$.

Доказательство: $\angle C = \angle BAC = 80°$, так как ΔABC – равнобедренный ($AB = BC$), $\angle DAC = 40°$, тогда $\angle EAD = 40°$.

$AE = ED$, тогда $\angle EDA = \angle EAD = 40°$.

Так как $\angle EDA = \angle DAC$, то $ED \parallel AC$.

4. Рис. 3.23.

Дано: $BD = BE$, DC – биссектриса $\angle ADE$, $\angle BDE = 70°$, $\angle DCA = 55°$.

Доказать: $DE \parallel AC$.

Доказательство: $\angle BDE = 70°$, тогда $\angle EDA = 110°$.

DC – биссектриса $\angle ADE$, тогда $\angle EDC = 55°$.

$\angle EDC = \angle DCA = 55°$, тогда $DE \parallel AC$.

5. Рис. 3.24.

Дано: $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$.

Доказать: $a \parallel b$, $m \parallel n$.

Доказательство: $\angle 1 = \angle 2$, тогда $m \parallel n$. $\angle 2 = \angle 3$, тогда $a \parallel b$.

Домашнее задание

1. § 24, 25, вопросы 3–5.
2. Решить задачи № 188, 189, 190.

3. *Дополнительная задача (см. рис. 3.25):*
Дано: $\angle 1 = 83°$, $\angle 2$ больше $\angle 1$ на $14°$.
Параллельны ли прямая MN и сторона AB?

Урок 32. Практические способы построения параллельных прямых

Цели урока:

1) совершенствовать навыки решения задач на применение признаков параллельности прямых;
2) ознакомить учащихся с практическими способами построения параллельных прямых и научить их применять на практике.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока и сформулировать цели.

II. Самостоятельная работа

В начале урока проводится самостоятельная работа обучающего характера с последующей самопроверкой.

I уровень

Вариант I

1. Рис. 3.26. Параллельны ли прямые a и b, если:

а) $\angle 1 = \angle 3$; б) $\angle 1 = \angle 4$;
в) $\angle 1 + \angle 2 = 180°$; г) $\angle 5 = \angle 6 = 90°$;
д) $\angle 1 = \angle 2$.

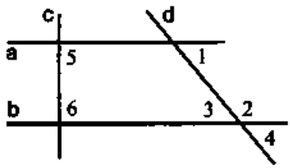


Рис. 3.26

2. Рис. 3.27.
Дано: $\Delta ABC = \Delta CDE$; $BC = DE$.
Доказать: $AB \parallel CD$.

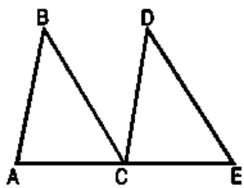


Рис. 3.27

Вариант II

1. Рис. 3.28. Параллельны ли прямые a и b, если:

а) $\angle 1 = \angle 2 = 90°$; б) $\angle 3 = \angle 4$;
в) $\angle 4 = \angle 5$; г) $\angle 6 = \angle 4$;
д) $\angle 4 + \angle 6 = 180°$.

2. Рис. 3.29.
Дано: $\Delta ABD = \Delta ECF$, $AD = CF$.
Доказать: $AB \parallel EF$.

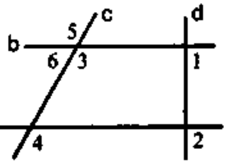


Рис. 3.28

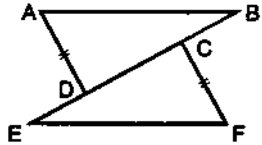


Рис. 3.29

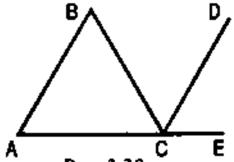


Рис. 3.30

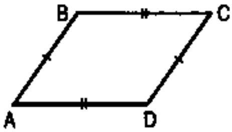


Рис. 3.31

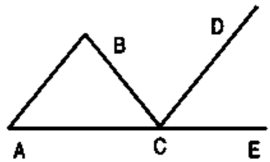


Рис. 3.32

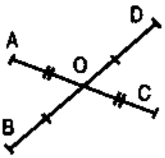


Рис. 3.33

II уровень

Вариант I

1. Рис. 3.30.

Дано: $AB = BC$; $\angle A = 60°$; CD – биссектриса $\angle BCE$.

Доказать: $DC \parallel AB$.

2. Рис. 3.31.

Дано: $AB = CD$; $BC = AD$.

Доказать: $BC \parallel AD$.

Вариант II

1. Рис. 3.32.

Дано: $AB = BC$; $\angle A = 30°$; $\angle DCE = 1/5\ \angle BCE$.

Доказать: $AB \parallel CD$.

2. Рис. 3.33.

Дано: $AO = OC$; $BO = OD$.

Доказать: $BC \parallel AD$.

Самопроверка решения задач самостоятельной работы

Для организации самопроверки нужно заготовить решения задач в письменном виде (возможна краткая запись).

I уровень

Вариант I

1. а) Да, так как $\angle 1$ и $\angle 3$ – накрест лежащие при прямых a и b и секущей d.
   б) Да, так как $\angle 1$ и $\angle 4$ – соответственные при прямых a и b и секущей d.
   в) Да, так как $\angle 1$ и $\angle 2$ – односторонние при прямых a и b и секущей d.
   г) Да, так как две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны.
   д) Нет, так как $\angle 1$ и $\angle 2$ – односторонние при прямых a и b и секущей d.

2. Так как $\Delta ABC = \Delta CDE$ и $BC = DE$, то $\angle BAC = \angle DCE$. $\angle BAC$ и $\angle DCE$ – соответственные при прямых AB и CD и секущей AE, а так как $\angle BAC = \angle DCE$, то $AB \parallel CD$.

Вариант II

1. а) Да, так как две прямые, параллельные третьей, параллельны.
   б) Да, так как $\angle 3$ и $\angle 4$ – накрест лежащие при прямых a и b и секущей c.

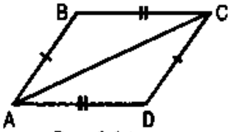


Рис. 3.34

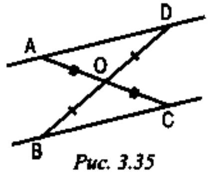


Рис. 3.35

в) Да, так как $\angle 4$ и $\angle 5$ – соответственные при прямых a и b и секущей c.

г) Нет, так как $\angle 4$ и $\angle 6$ – односторонние при прямых a и b и секущей c.

д) Да, так как $\angle 4$ и $\angle 6$ – односторонние при прямых a и b и секущей c.

2. Так как $\Delta ABD = \Delta ECF$ и $AD = CF$, то $\angle B = \angle E$. $\angle B$ и $\angle E$ – накрест лежащие при прямых AB и EF и секущей BE, а так как $\angle B = \angle E$, то $AB \parallel EF$.

II уровень

Вариант I

1. Так как $AB = BC$ и $\angle A = 60°$, то $\angle BCA = 60°$ ($\angle A = \angle BCA$ как углы при основании равнобедренного ΔABC).

Так как CD – биссектриса $\angle BCE$, то $\angle DCE = \angle BCE : 2 = 120° : 2 = 60°$ ($\angle BCE$ и $\angle ACB$ – смежные и $\angle BCE = 180 - \angle ACB$).

Получили, что соответственные углы BAC и DCE при прямых AB и CD и секущей AE равны, следовательно, $AB \parallel CD$.

2. Рис. 3.34.

$\Delta ABC = \Delta CDA$ по трем сторонам ($AB = CD$, $BC = AD$, AC – общая сторона), следовательно, $\angle BCA = \angle CAD$.

Но $\angle BCA$ и $\angle CAD$ – накрест лежащие углы при прямых BC и AD и секущей AC и так как $\angle BCA = \angle CAD$, то $BC \parallel AD$.

Вариант II

1. Так как $AB = BC$ и $\angle A = 30°$, то $\angle BCA = 30°$ ($\angle A = \angle BCA$ как углы при основании равнобедренного ΔABC).

$\angle BCA$ и $\angle BCE$ – смежные и их сумма равна 180°, поэтому $\angle BCE = 180° - 30° = 150°$.

$\angle DCE = 1/5\ \angle BCE = 1/5 \cdot 150° = 30°$.

Получили, что соответственные углы BAC и DCE при прямых AB и CD и секущей AE равны, следовательно, $AB \parallel CD$.

2. Рис. 3.35.

$\Delta AOD = \Delta COB$ по двум сторонам и углу между ними ($AO = OC$, $BO = OD$, $\angle AOD = \angle COB$ как вертикальные), следовательно, $\angle ADO = \angle COB$.

Но $\angle AOD$ и $\angle CBO$ – накрест лежащие углы при прямых AD и BC и секущей BD и так как $\angle ADO = \angle CBO$, то $BC \parallel AD$.

III. Изучение нового материала

Практические способы построения параллельных прямых описаны в пункте 26 учебника и учащиеся могут ознакомиться с содержанием пункта самостоятельно.

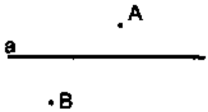


Рис. 3.36

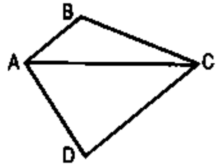


Рис. 3.37

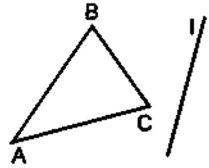


Рис. 3.38

IV. Закрепление изученного материала

Решить задачи №103, 104 из рабочей тетради.

Практические задания:

(Задания выполняются самостоятельно, учитель контролирует правильность у менее подготовленных учащихся.)

1. С помощью угольника и линейки проведите пять параллельных прямых.

2. Рис. 3.36. С помощью угольника и линейки через точки A и B проведите прямые, параллельные прямой a.

3. Рис. 3.37. С помощью угольника и линейки через вершины B и D проведите прямые a и b, параллельные AC. Будет ли $a \parallel b$? Объясните.

4. Рис. 3.38. С помощью угольника и линейки через вершины A, B и C проведите прямые a, b и c, параллельные прямой l. Параллельны ли эти прямые между собой? Пересечет ли прямая AC прямую l? Дайте объяснение.

5. С помощью циркуля и линейки через вершину C треугольника ABC проведите прямую, параллельную AB.

Домашнее задание

1. § 26, вопрос 6.
2. Решить задачи № 191, 192, 194.
3. *Дополнительные задачи:*

Задача 1

С помощью циркуля и линейки постройте прямую, параллельную одной стороне треугольника и проходящую через середину одной из двух других его сторон.

Задача 2

В треугольнике ABC BD – биссектриса $\angle ABC$, $AM = MB$. Постройте прямую, проходящую через точку M и параллельную BD с помощью циркуля и линейки.

Урок 33. Решение задач по теме «Признаки параллельности прямых»

Цель урока:

совершенствование навыков решения задач на применение признаков параллельности прямых.

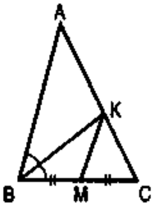


Рис. 3.39

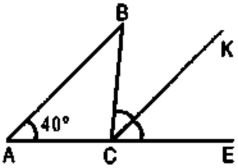


Рис. 3.40

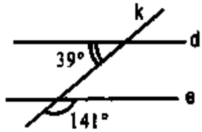


Рис. 3.41

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели.

II. Повторение. Проверка домашнего задания

Проверить решения домашних задач № 191, 192 и дополнительной задачи 1. (Решения задач предложить оформить на доске трех учеников, в то время пока остальные учащиеся работают в рабочих тетрадях.)

Задача № 191

Решение (см. рис. 3.39): Так как $BM = MK$, то $\Delta\ BMK$ – равнобедренный с основанием BK, следовательно, $\angle MBK = \angle BKM$. Так как BK – биссектриса $\angle ABC$, то $\angle ABK = \angle KBM$, отсюда следует, что $\angle ABK = \angle BKM$.

Но $\angle ABK$ и $\angle BKM$ – накрест лежащие при прямых AB и KM и секущей BK и так как они равны, то $AB \parallel KM$.

Задача № 192

Решение (см. рис. 3.40): CK – биссектриса $\angle BCE$, а так как $\angle BCE = 80°$, то $\angle KCE = 40°$. $\angle BAC$ и $\angle KCE$ – соответственные при прямых AB и CK и секущей AE и так как $\angle BAC = \angle KCE$, то $AB \parallel CK$, то есть биссектриса $\angle BCE$ параллельна прямой AB.

Дополнительная задача 1

1) Построить середину отрезка AB – точку M.

2) Построить перпендикуляр к стороне BC, проходящий через точку M (ME, $E \in BC$).

3) Построить перпендикуляр к отрезку ME, проходящий через точку M (MK, $K \in AC$). MK – искомая прямая. $MK \parallel BC$, так как $MK \perp ME$ и $BC \perp ME$.

Работа в рабочих тетрадях: решить задачи №98–100 самостоятельно с последующей самопроверкой (один из учащихся читает свое решение, остальные проверяют).

III. Самостоятельная работа

I уровень

Вариант I

1. Рис. 3.41.

Параллельны ли прямые d и e?

2. Рис. 3.42.

Дано: $EO = LO$; $FO = KO$.

Доказать: $EF \parallel KL$.

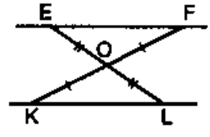


Рис. 3.42

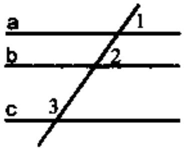


Рис. 3.43

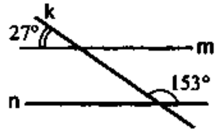


Рис. 3.44

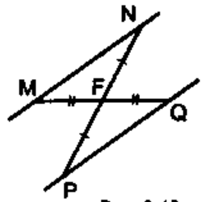


Рис. 3.45

3. Рис. 3.43.

Дано: $\angle 1 = \angle 2$; $\angle 2 + \angle 3 = 180°$.

Доказать: $a \parallel c$.

Вариант II

1. Параллельны ли прямые *m* и *n*, изображенные на рис. 3.44?

2. Рис. 3.45.

Дано: $NF = PF$; $MF = QF$.

Доказать: $MN \parallel PQ$.

3. Рис. 3.46.

Дано: $\angle 1 + \angle 2 = 180°$; $\angle 2 = \angle 3$.

Доказать: $a \parallel c$.

II уровень

Вариант I

1. Рис. 3.47.

Какие из прямых *a*, *b*, *c*, изображенных на рисунке, являются параллельными?

2. Рис. 3.48.

Дано: $AB = BC$; $DE = EF$; $\angle 1 = \angle 2$.

Доказать: $AB \parallel DE$.

3. Прямая *EK* является секущей для прямых *CD* и *MN* ($E \in CD$, $K \in MN$). Угол *DEK* равен 65°. При каком значении угла *NKE* прямые *CD* и *MN* могут быть параллельными?

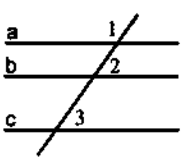


Рис. 3.46

Вариант II

1. Рис. 3.49.

Какие из прямых *m*, *n*, *k*, изображенных на рисунке, являются параллельными?

2. Рис. 3.50.

Дано: $MN = NK$; $PO = OE$; $\angle 1 = \angle 2$.

Доказать: $MN \parallel OE$.

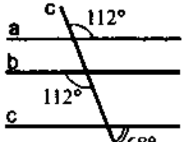


Рис. 3.47

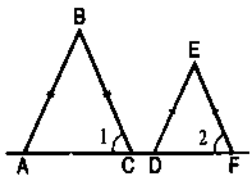


Рис. 3.48

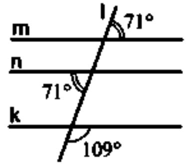


Рис. 3.49

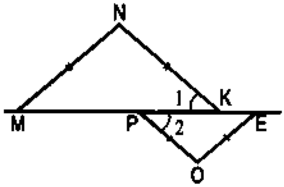


Рис. 3.50

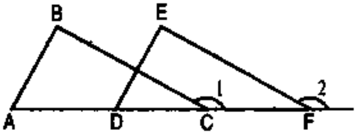


Рис. 3.51

3. Прямая MN является секущей для прямых AB и CD ($M \in AB$, $N \in$ $\in CD$). Угол AMN равен 78°. При каком значении угла CNM прямые AB и CD могут быть параллельными?

III уровень

Вариант I

1. Рис. 3.51.

Дано: $\angle 1 = \angle 2$; $BC = EF$; $AD = CF$.

Доказать: $AB \parallel DE$.

2. Рис. 3.52.

Дано: $\angle 1 = \angle 2$; $BD \perp AC$; AC – биссектриса $\angle BAE$.

Доказать: $BC \parallel AE$.

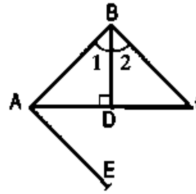


Рис. 3.52

3. Рис. 3.53.

Дано: $AM = MD$; $DE = DF$; $AE = AF$.

Доказать: $MD \parallel AF$.

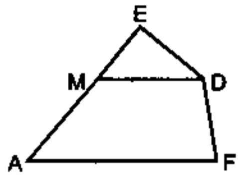


Рис. 3.53

Вариант II

1. Рис. 3.54.

Дано: $\angle 1 = \angle 2$; $ED = BC$; $EF = AC$.

Доказать: $EF \parallel AC$.

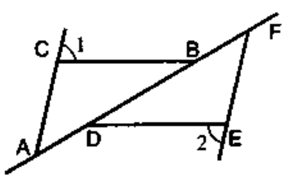


Рис. 3.54

2. Рис. 3.55.

Дано: AC – биссектриса $\angle BAD$; $BE \perp AC$; $AE = EC$.

Доказать: $AD \parallel BC$.

3. Рис. 3.56.

Дано: AC – биссектриса $\angle BAM$; $\angle BDA =$ $= \angle BEC$; $AD = CE$; $BE = BD$.

Доказать: $AM \parallel BC$.

Ответы и указания к задачам самостоятельной работы:

I уровень

Вариант I

1. $d \parallel e$.

2. $\Delta EOF = \Delta LOK$, значит, $\angle E = \angle L$. $\angle E = \angle L$, значит, $EF \parallel KL$.

3. Рис. 3.57.

$\angle 1 = \angle 2$, $\angle 2 + \angle 3 = 180°$, но $\angle 1 =$ $= \angle 4$, тогда $\angle 4 + \angle 3 = 180°$, $a \parallel c$.

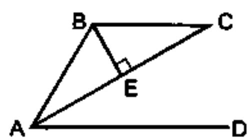


Рис. 3.55

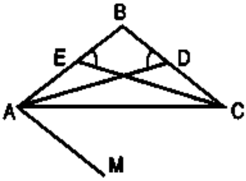


Рис. 3.56

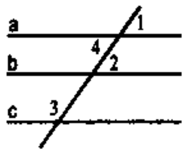


Рис. 3.57

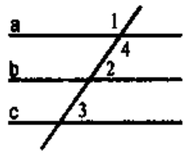


Рис. 3.58

Вариант II

1. $m \parallel n$.

2. $\Delta\, MFN = \Delta\, QFP$, значит, $\angle M = \angle Q$. $\angle M = \angle Q$, значит, $MN \parallel PQ$.

3. Рис. 3.58.

$\angle 1 + \angle 2 = 180°$. $\angle 2 = \angle 3$, но $\angle 1 = \angle 4$, значит, $\angle 4 + \angle 3 = 180°$. Следовательно, $a \parallel c$.

II уровень

Вариант I

1. $a \parallel b \parallel c$.

2. $\Delta\, ABC$ и $\Delta\, DEF$ – равнобедренные, $\angle 1 = \angle 2$, значит, $\angle A = \angle D$. $\angle A$ и $\angle EDF$ – соответственные при прямых AB и DE и секущей AF, следовательно, $AB \parallel DE$.

3. Рассмотрим два случая (рис. 3.59):

а) $\angle NKE = 115°$; б) $\angle NKE = 65°$.

Вариант II

1. $m \parallel n \parallel k$.

2. $\Delta\, MNK$ и $\Delta\, POE$ – равнобедренные, $\angle 1 = \angle 2$, тогда $\angle NMK = \angle PEO$, но $\angle NMK$ и $\angle PEO$ – накрест лежащие при прямых MN и OE и секущей ME, следовательно, $MN \parallel OE$.

3. Рассмотрим два случая (рис. 3.60):

а) $\angle CNM = 102°$; б) $\angle CNM = 78°$.

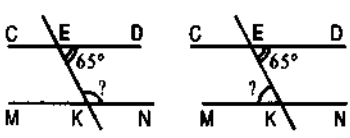
III уровень

Вариант I

1. $\Delta\, ABC = \Delta\, DEF$ по двум сторонам и углу между ними, значит, $\angle BAC = \angle EDF$. $\angle BAC$ и $\angle EDF$ – соответственные при прямых AB и DE и секущей AF, следовательно, $AB \parallel DE$.

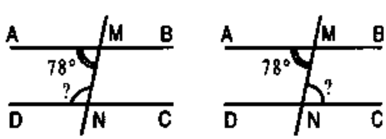
2. $\Delta\, ABD = \Delta\, CBD$ по стороне и прилежащим к ней углам, следовательно, $\angle BAD = \angle BCD$.

AC – биссектриса $\angle BAE$, значит, $\angle BAD = \angle DAE$.



а) б)

Рис. 3.59



а) б)

Рис. 3.60

Получили, что накрест лежащие углы BCD и DAE при прямых BC и AE и секущей AC равны, значит, $BC \parallel AE$.

3. $\Delta AED = \Delta AFD$ по трем сторонам, поэтому $\angle EAD = \angle DAF$. ΔAMD – равнобедренный, значит, $\angle EAD = \angle MDA$.

$\angle MDA$ и $\angle DAF$ – накрест лежащие при прямых MD и AF и секущей AD и они равны, значит, $MD \parallel AC$.

Вариант II

1. $\Delta ABC = \Delta FDE$ по двум сторонам и углу между ними, значит, $\angle CAB = \angle EFD$. $\angle CAB$ и $\angle EFD$ – накрест лежащие при прямых AC и EF и секущей AF, следовательно, $AC \parallel EF$.

2. $\Delta ABE = \Delta CBE$ по двум сторонам и углу между ними, значит, $\angle BAE = \angle BCE$.

AC – биссектриса $\angle BAD$, поэтому $\angle BAE = \angle EAD$.

Получили, что накрест лежащие углы BCE и EAD при прямых BC и AD и секущей AC равны, значит, $BC \parallel AD$.

3. $\Delta ADB = \Delta CEB$ по двум сторонам и углу между ними, отсюда $AB = BC$, значит, $\angle BAC = \angle BCA$ как углы при основании равнобедренного ΔABC. AC – биссектриса $\angle BAM$, значит, $\angle BAC = \angle CAM$. Накрест лежащие углы CAM и ACB при прямых AM и BC и секущей AC равны, значит, $AM \parallel BC$.

Домашнее задание

1. Решить задачи № 193, 195 из учебника, №101, 102 из рабочей тетради.
2. *Дополнительная задача* (см. рис. 3.61):

Дано: $AB = BC = CD = DE$; $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE$.

Доказать: точки A, C, E лежат на одной прямой.

Решение:

1) $\Delta ABC = \Delta BCD$ по двум сторонам и углу между ними, следовательно, $\angle ACB = \angle CBD$, а отсюда $AC \parallel BD$, так как накрест лежащие углы при прямых AC и BD и секущей BC равны.

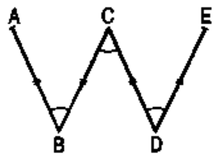


Рис. 3.61

2) Из равенства треугольников BCD и CDE можно получить таким же образом, что $BD \parallel CE$.

3) $AC \parallel BD$, $CE \parallel DB$. Но через точку C, не лежащую на прямой BD, проходит только одна прямая, параллельная BD. Это значит, прямые AC и CE совпадают, а точки A, C, E лежат на одной прямой.

Урок 34. Аксиома параллельных прямых

Цели урока:

1) ввести понятие аксиомы;
2) рассмотреть аксиому параллельных прямых и ее следствия;
3) научить учащихся решать задачи на применение аксиомы параллельных прямых.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели на урок.

II. Актуализация знаний учащихся

1. Проверить домашнюю дополнительную задачу и задачи №101, 102 рабочей тетради.

2. Анализ ошибок самостоятельной работы.

(I уровень – подготовить рисунки к задачам на доске, разобрать устно решение задач; II и III уровень – раздать каждому ученику ответы и указания к задачам и предложить самостоятельно найти ошибки в своей работе.)

III. Изучение нового материала

1. Беседа об аксиомах геометрии (см. пункт 27 и приложение 1 учебника).

2. Задача для самостоятельного решения с последующим обсуждением:

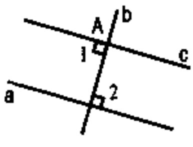


Рис. 3.62

Задание: Через точку A, не лежащую на прямой a, провести прямую, параллельную прямой a.

Ход построения (рис. 3.62):

1) провести через точку A прямую b так, что $a \perp b$;

2) провести через точку A прямую c так, что $b \perp c$.

Доказательство: $\angle 1 = \angle 2 = 90°$, т.е. накрест лежащие углы при прямых a и c и секущей b равны, следовательно, $a \parallel c$.

Вопросы учащимся:

– Всегда ли через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, параллельную данной?

– Сколько прямых, параллельных данной, можно провести через точку, не лежащую на данной прямой?

Можно ли доказать, что через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной? Многие математики, начиная с древних времен, пытались доказать данное утверждение, а в «Началах» Евклида это утверждение называется пятым постулатом. Попытки доказать пятый постулат Евклида не увенчались успехом, и лишь в XIX веке было окончательно выяснено, что утверждение о единственности прямой, проходящей через данную точку параллельно данной прямой, не может быть доказано на основе остальных аксиом Евклида, а само является аксиомой. Огромную роль в решении этого вопроса сыграл русский математик Николай Иванович Лобачевский. Итак, аксиома параллельных прямых гласит: «Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной».

– Является ли утверждение «Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, параллельную данной» аксиомой? Почему? (*Это утверждение не является аксиомой, так как оно доказывается.*)

– Вопрос для учащихся: Чем отличаются вышеуказанные утверждения? (*Аксиома параллельных прямых говорит о единственности*

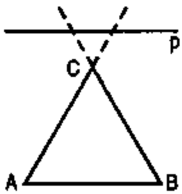


Рис. 3.63

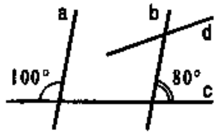


Рис. 3.64

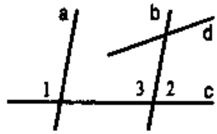


Рис. 3.65

такой прямой, а другое утверждение — о существовании такой прямой.)

3. Понятие следствия и рассмотрение следствий аксиомы параллельных прямых см. пункт 28 учебника.

IV. Закрепление изученного материала

Решить задачу №105 из рабочей тетради.

Решить задачи № 197, 199.

Один из учащихся работает у доски, остальные в тетрадях.

Задача № 197

1) Через точку, не лежащую на прямой *p*, может проходить только одна прямая, параллельная данной, поэтому другие три не параллельны прямой *p*, то есть эти прямые пересекаются с прямой *p*.

2) Может оказаться, что ни одна прямая, проходящая через указанную точку, не параллельна прямой *p*, тогда все четыре прямые пересекаются с прямой *p*. (*Ответ*: три или четыре.)

Задача № 199

Решение (см. рис. 3.63): Прямые *BC* и *AC* имеют общие точки с прямой *AB*. По следствию аксиомы параллельности прямых «если прямая пересекает одну их двух параллельных прямых, то она пересекает и другую». А прямые *BC* и *AC* пересекают прямую *AB*, значит, они пересекают и прямую *p*, так как по условию задачи $AB \parallel p$.

2. Самостоятельное решение задач:

Задача 1

Прямая *d* пересекает прямую *b* (рис. 3.64). Пересечет ли эта прямая прямую *a*? Почему?

Решение (см. рис. 3.65): По условию задачи $\angle 2 = 80°$. $\angle 2$ и $\angle 3$ – смежные и $\angle 2 + \angle 3 = 180°$, тогда $\angle 3 = 100°$.

$\angle 1$ и $\angle 3$ – соответственные углы при прямых *a* и *b* и секущей *c*, и они равны, значит, $a \parallel b$.

Прямая *d* пересекает прямую *b*, параллельную прямой *a*. По следствию аксиомы параллельных прямых прямая *d* пересекает прямую *a*. (*Ответ*: прямая *d* пересечет прямую *a*.)

Задача 2

Пересечет ли прямая *a* прямую *DE* (рис. 3.66)? Ответ поясните.

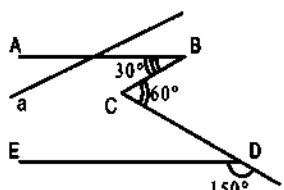


Рис. 3.66

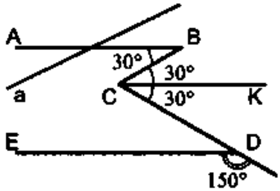


Рис. 3.67

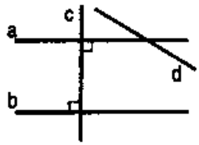


Рис. 3.68

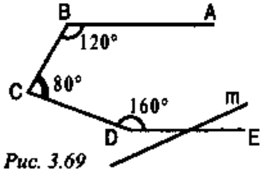


Рис. 3.69

Решение (см. рис. 3.67):

1. Пусть CK – биссектриса $\angle BCD$. Тогда $\angle ABC = \angle BCK = 30°$, а так как данные углы являются накрест лежащими при прямых AB и CK и секущей BC, то $AB \parallel CK$. Так как a пересекает AB, то a пересекает и CK.

2. $\angle EDP = 150°$, тогда $\angle CDE = 30°$. Но $\angle KCD = 30°$ тоже. Накрест лежащие углы KCD и EDP равны, значит, $KC \parallel ED$. А так как a пересекает CK, то она пересекает и DE. (*Ответ*: прямая a пересечет прямую DE.)

Домашнее задание

1. § 27, 28, вопросы 7–11.
2. Решить задачи № 196, 198, 200.
3. *Дополнительные задачи:*

Задача 1

Дано: $a \perp c$, $b \perp c$, прямая d пересекает a (рис. 3.68).

Пересекает ли прямая d прямую b? Почему?

Задача 2

Дано: Прямая m пересекает прямую DE (см. рис. 3.69).

Пересекает ли эта прямая прямую AB? Ответ поясните.

Урок 35. Свойства параллельных прямых

Цели урока:

1) рассмотреть свойства параллельных прямых;
2) показать учащимся применение свойств параллельных прямых;
3) закрепить знания, умения, навыки учащихся по теме «Аксиома параллельных прямых».

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели на данный урок.

II. Актуализация знаний учащихся

1. Выполнение индивидуальных заданий у доски с последующим заслушиванием ответов всеми учащимися:

– Доказать, что через данную точку, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной.
– Доказать, что прямая, пересекающая одну из двух параллельных прямых, пересекает и другую.

– Доказать, что если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

2. Тест с последующей самопроверкой (задания 1 и 2 выполняются одновременно: 3 ученика работают у доски, остальные в тетрадях).

1) Вычеркнуть лишние слова в скобках:
Аксиома – это (*очевидные, принятые, исходные*) положения геометрии, не требующие (*объяснений, доказательств, обоснований*).

2) Выбрать окончание формулировки аксиомы параллельных прямых:
Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит:
   а) только одна прямая, параллельная данной;
   б) всегда проходит прямая, параллельная данной;
   в) только одна прямая, не пересекающаяся с данной.

3) Что может быть следствием аксиомы или теоремы? Указать неверные ответы.
   а) Утверждение, не требующее доказательства.
   б) Новая теорема, для доказательства которой использована аксиома или теорема.
   в) Утверждение, непосредственно выводимое из аксиомы или теоремы.

4) Указать следствия аксиомы параллельных прямых.
   а) Если отрезок или луч пересекает одну из параллельных прямых, то он пересекает и другую.
   б) Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны друг другу.
   в) Если прямая пересекает одну их параллельных прямых, то она пересекает и другую.
   г) Если три прямые параллельны, то любые две из них параллельны друг другу.
   д) Если две прямые не параллельны третьей прямой, то они не параллельны между собой.
   е) Если прямая пересекает одну из параллельных прямых, то она не может не пересекать другую.
   ж) Если две прямые параллельны третьей прямой, то они не могут быть не параллельны между собой.

5) Указать правильный ответ на вопрос.

Если через точку, лежащую вне прямой, проведено несколько прямых, то сколько из них пересекаются с исходной прямой?
   а) Неизвестно, так как не сказано, сколько прямых проведено через точку.
   б) Все, кроме параллельной прямой.
   в) Все, которые имеют на рисунке точку пересечения с исходной прямой.

6) Почему, если одна из прямых, проходящих через точку, лежащую вне заданной прямой, параллельна этой прямой, то другие прямые, проходящие через эту точку, не могут быть ей параллельны? Указать неправильный ответ на этот вопрос.

а) Это противоречит аксиоме параллельных прямых.
б) Любая другая прямая, если она также параллельна заданной, совпадет с первой.
в) Все другие прямые имеют точку пересечения с заданной прямой, хотя она может находиться на сколь угодно большом расстоянии от исходной точки.

Ответы к тесту:

1. Следует вычеркнуть слова: ***очевидно, принятые, объяснений, обоснований***; 2. а; 3. а, б; 4. б, в, е, ж; 5. б; 6. в.

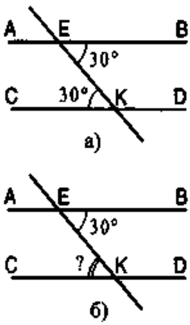


Рис. 3.70

III. Изучение нового материала

1. Решить задачу (рис. 3.70):
а) *Доказать*: $AB \parallel CD$.
б) *Дано*: $AB \parallel CD$.
Найти: $\angle EKC$.

Следует обратить внимание учащихся, что в первой задаче $a \parallel b$ по первому признаку параллельности прямых, а вторая задача является обратной первой и мы не знаем, равны ли накрест лежащие углы, если прямые параллельны. Таким образом, перед учащимися поставлена проблема, которую необходимо разрешить. Итак:

Пусть $a \parallel b$, c – их секущая, $\angle 1$ и $\angle 2$ – накрест лежащие углы, образованные данными прямыми.

Требуется выяснить, равны ли $\angle 1$ и $\angle 2$.

Решение этой задачи можно построить так же, как доказательство свойства накрест лежащих углов при параллельных прямых и их секущей по учебнику.

Вывод:

Если две параллельные прямые пересечены третьей, то накрест лежащие углы равны.

Это утверждение называют ***свойством накрест лежащих углов*** при параллельных прямых и их секущей.

2. Информация для учащихся:

Во всякой теореме различают две части: ***условие*** и ***заключение***. Условие теоремы – это то что дано, а заключение – то, что требуется доказать.

Далее можно попросить учащихся составить таблицу (см. стр. 153).

– В чем заключается разница между этими теоремами?

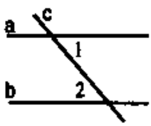
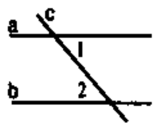
Вывод:

Теоремой, ***обратной*** данной, называется такая теорема, в которой условием является заключение данной теоремы, а заключением – условие данной теоремы.

3. Беседа о методе доказательства от противного по учебнику.

4. Доказательства следствия свойства накрест лежащих углов при параллельных прямых и их секущей и свойств соответственных и односторонних углов при параллельных прямых и их секущей можно предложить учащимся получить самостоятельно в ходе выполнения следующих упражнений:

– Докажите, что если прямая перпендикулярна к одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.
– Сформулируйте теорему, обратную признаку параллельности прямых, использующему соответственные углы. Дайте название полученной теореме и докажите ее.
– Сформулируйте теорему, обратную признаку параллельности прямых, использующему односторонние углы. Дайте название полученной теореме и докажите ее.

Название теоремы	**Признак параллельности прямых**	**Свойство параллельных прямых**
Формулировка теоремы	Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.	Если две параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны.
Условие (дано)	 прямые a, b; c – их секущая; $\angle 1$, $\angle 2$ – накрест лежащие углы; $\angle 1 = \angle 2$	 прямые a, b; c – их секущая; $\angle 1$, $\angle 2$ – накрест лежащие углы; $a \parallel b$
Заключение (доказать)	$a \parallel b$	$\angle 1 = \angle 2$

IV. Закрепление изученного материала

1. Решение задач по готовым чертежам (устно).

1) Рис. 3.71.

Дано: $\angle 1 = 75°$; $a \parallel b$.

Найти: $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$.

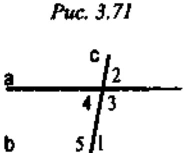


Рис. 3.71

2) Рис. 3.72.

Дано: $\angle 1 + \angle 2 = 160°$; $a \parallel b$.

Найти: $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$, $\angle 6$.

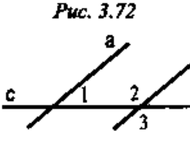


Рис. 3.72

2. Решить задачи №106, 107, 108 из рабочей тетради (в конце урока у менее подготовленных учащихся собрать рабочие тетради на проверку.)

Домашнее задание

1. § 29, вопросы 12-15.

2. Решить задачи по готовым чертежам:

1) Рис. 3.73.

Дано: $a \parallel b$; $\angle 1$ в 4 раза меньше $\angle 2$.

Найти: $\angle 3$.

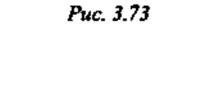


Рис. 3.73

2) Рис. 3.74.

Дано: $x \parallel y$; $\angle 1 + \angle 2 = 100°$.

Найти: $\angle 3$.

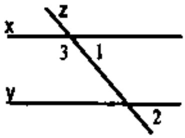


Рис. 3.74

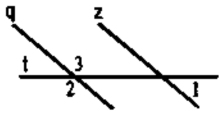


Рис. 3.75

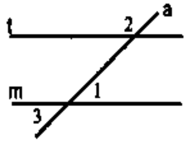


Рис. 3.76

3) Рис. 3.75.
Дано: $q \parallel z$; $\angle 1 : \angle 2 = 2 : 7$.
Найти: $\angle 3$.
4) Рис. 3.76.
Дано: $\angle 2$ на 90° больше $\angle 1$.
Найти: $\angle 3$.

Урок 36. Свойства параллельных прямых

Цели урока:

1) закрепить свойства параллельных прямых;
2) совершенствовать навыки доказательств теорем;
3) научить учащихся решать задачи на применение свойств параллельных прямых.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить цели урока и тему урока.

II. Повторение. Проверка домашнего задания

1. Теоретический опрос.

Индивидуальные задания для работы у доски с последующим заслушиванием готовых ответов:

– Доказать свойство накрест лежащих углов при параллельных прямых и их секущей.
– Доказать свойство соответственных углов при параллельных прямых и их секущей.
– Доказать свойство односторонних углов при параллельных прямых и их секущей.
– Доказать, что если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой.

Работа в рабочих тетрадях: 2–3 ученика самостоятельно решают задачу № 109, тетради сдают на проверку учителю.

Фронтальная работа с классом:

– Сформулируйте утверждение, обратное данному, и выясните, верно ли оно:
  а) вертикальные углы равны;
  б) сумма смежных углов равна 180°;
  в) если накрест лежащие углы при пересечении двух прямых их секущей равны, то эти прямые параллельны;

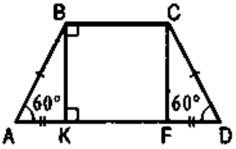


Рис. 3.77

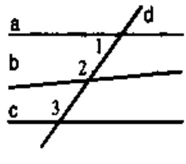


Рис. 3.78

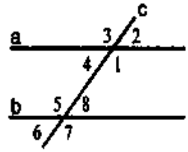


Рис. 3.79

г) если C – середина отрезка AB, то $AC = CB$;

д) в равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, является его медианой и высотой.

2. Проверить домашнее задание на готовых чертежах.

III. Решение задач

1. Решить задачи №114, 115 из рабочей тетради (один из учащихся по указанию учителя вслух читает задачу и решает ее, остальные учащиеся внимательно слушают его и исправляют его ошибки).

2. Решить задачи № 202, 205 (один из учащихся по указанию учителя решает задачу на доске, остальные работают в тетрадях).

3. Самостоятельно решить задачи № 203, 206.

(Учитель контролирует работу менее подготовленных учащихся и оказывает индивидуальную помощь остальным по необходимости.)

4. *Дополнительная задача* (см. рис. 3.77):

Дано: $AB = CD$, $AK = DF$, $\angle A = \angle D = 60°$, $\angle AKB = \angle KBC = 90°$.

Доказать: $BK \parallel CF$, $BC \parallel AD$.

Задача № 202

Решение (см. рис. 3.78):

1) $\angle 1$, $\angle 2$ – односторонние углы при прямых a и b и секущей d, $\angle 1 + \angle 2 = 42° + 140° = 182° \neq 180°$, следовательно, прямые a и b не параллельны.

2) $\angle 2$ и $\angle 3$ – соответственные углы при прямых c и b и секущей d и $\angle 2 \neq \angle 3$ ($\angle 2 = 140°$, $\angle 3 = 138°$), т.е. прямые c и b не параллельны.

3) $\angle 1$ и $\angle 3$ – односторонние углы при прямых a и c и секущей d и $\angle 1 + \angle 3 = 42° + 138° = 180°$, следовательно, прямые a и c параллельны. (*Ответ*: $a \parallel c$.)

Наводящие вопросы:

1) Как проверить, параллельны ли прямые a и b? Как называются углы 1 и 2?

2) Параллельны ли прямые b и c? Какой из признаков параллельности прямых позволяет это определить?

3) Укажите признак параллельности прямых, позволяющий установить, параллельны ли прямые a и c.

Задача № 203

Решение (см. рис. 3.79):

а) Пусть $\angle 1 = 150°$, тогда $\angle 3 = 150°$, $\angle 2 = 30°$, $\angle 4 = 30°$, $\angle 8 = 30°$, $\angle 6 = 30°$, $\angle 5 = 150°$, $\angle 7 = 150°$.

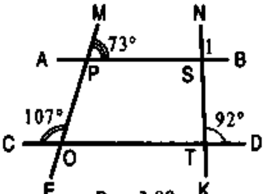


Рис. 3.80

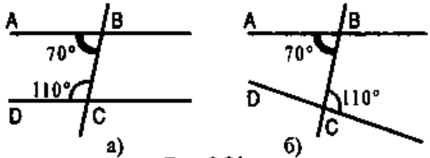


Рис. 3.81

б) Пусть $\angle 1$ на 70° больше, чем $\angle 2$. Так как $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, то $\angle 2 = 55°$, $\angle 1 = 125°$, тогда $\angle 3 = 125°$, $\angle 4 = 55°$. Так как $a \parallel b$, то $\angle 8 = 55°$, $\angle 5 = 125°$, $\angle 6 = 55°$, $\angle 7 = 125°$.

Задача № 205

Решение (см. рис. 3.80): $\angle MPS = \angle APO$ как вертикальные, значит, $\angle APO = 73°$.

$\angle APO + \angle COP = 73° + 107° = 180°$, а $\angle APO$ и $\angle COP$ – односторонние углы при прямых AB и CD и секущей ME, значит, $AB \parallel CD$. Так как $AB \parallel CD$, то $\angle NSB = \angle STD$, следовательно, $\angle NSB = 92°$ (т.е. $\angle 1 = 92°$).

Наводящие вопросы:

1) Есть ли на рисунке параллельные прямые? Какие?

2) Чему равна градусная мера угла 1?

Задача № 206

Решение:

а) AB может быть параллельна CD (см. рис. 3.81 а);

б) AB и CD могут пересекаться (см. рис. 3.81 б).

Дополнительная задача:

1) $\angle KBC = \angle AKB = 90°$, а так как это накрест лежащие углы при прямых BC и AD и секущей KB, то $BC \parallel AD$.

2) $\Delta ABK = \Delta DCF$ по двум сторонам и углу между ними ($AB = CD$, $AK = DF$, $\angle A = \angle D$), следовательно, $\angle AKB = \angle CFD = 90°$.

3) Так как $\angle CFD = 90°$, то $\angle KFC = 90°$.

4) $\angle AKB = \angle KFC = 90°$, а так как эти углы соответственные при прямых BK и CF и секущей AD, то $BK \parallel CF$.

Домашнее задание

1. § 29, вопросы 13–15.
2. Решить задачи: I уровень – № 110–113 из рабочей тетради; II уровень – № 204, 207, 209 из учебника.
3. Дополнительные задачи по готовым чертежам:

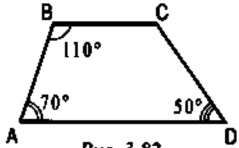


Рис. 3.82

Задача 1

Рис. 3.82.

Найти: $\angle C$.

Задача 2

Рис. 3.83.

Доказать: AB – биссектриса угла XAZ.

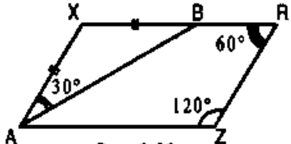


Рис. 3.83

Решение:

1) $\angle A + \angle B = 180°$, следовательно $BC \parallel AD$.

Так как $BC \parallel AD$, то $\angle BCD + \angle CDA = 180°$, тогда $\angle C = 130°$.

2) $\angle BRZ + \angle RZA = 180°$, следовательно, $XR \parallel AZ$. ΔAXB – равнобедренный, значит, $\angle XAB = \angle XBA = 30°$.

$XR \parallel AZ$, следовательно, $\angle XBA = \angle BAZ = 30°$.

Так как $\angle XAB = 30°$ и $\angle BAZ = 30°$, то AB – биссектриса $\angle XAZ$.

Урок 37. Решение задач по теме «Параллельные прямые»

Цели урока:

1) закрепить признаки параллельных прямых, свойства параллельных прямых и аксиому параллельных прямых;
2) совершенствовать навыки решения задач на применение признаков и свойств параллельных прямых.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему и цель урока.

II. Повторение. Проверка домашнего задания

1. Индивидуальный письменный теоретический опрос по вопросам 13–15 (от трех до шести учащихся).

2. Проверка решения дополнительных домашних задач.

(На доске заранее подготовить рисунки к задачам. Один из учащихся по указанию учителя выходит к доске и устно рассказывает решение задачи, делая краткие записи непосредственно на рисунке. Учащиеся внимательно его слушают, а затем исправляют его ошибки.)

3. Фронтальная работа с учащимися:

– Ученик, отвечая на вопросы учителя, дал соответствующие ответы. Проверьте, верны ли они. В случае неверного ответа укажите ошибки и сформулируйте правильный ответ:

а) Рис. 3.84.

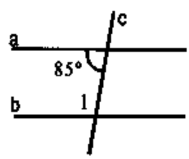


Рис. 3.84

Дано: $a \parallel b$.

Найти: $\angle 1$.

Решение: $\angle 1 = 85°$, так как они накрест лежащие при параллельных прямых a и b и секущей c.

б) Рис. 3.85.

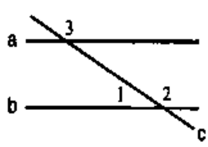


Рис. 3.85

Дано: $a \parallel b$, $\angle 3 = 148°$.

Найти: $\angle 1$, $\angle 2$.

Решение: $\angle 2 = \angle 3 = 148°$, так как они соответственные при параллельных прямых a и b и секущей c. $\angle 1$ и $\angle 2$ – смежные, поэтому $\angle 1 = 180° - \angle 2$, $\angle 1 = 42°$.

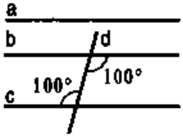


Рис. 3.86

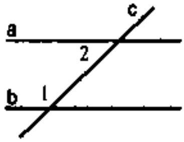


Рис. 3.87

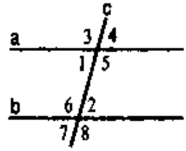


Рис. 3.88

в) Рис. 3.86.

Дано: $a \parallel b$. Параллельны ли a и c.

Решение: $b \parallel c$, так как равны накрест лежащие углы. Значит, и $a \parallel c$.

Примечание: в каждом задании есть или ошибки, или неточности в пояснениях.

III. Решение задач

1. Самостоятельно решить задачи на готовых чертежах, сделав в тетрадях краткие записи:

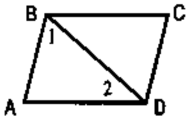


Рис. 3.89

Вариант I

1) Рис. 3.87.

Дано: $a \parallel b$, $\angle 1$ больше $\angle 2$ в 2 раза.

Найти: $\angle 1$, $\angle 2$.

2) Рис. 3.88.

Дано: $a \parallel b$, $\angle 1 + \angle 2 = 122°$.

Найти: $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$, $\angle 6$, $\angle 7$, $\angle 8$.

3) Рис. 3.89.

Дано: $AD \parallel BC$, $\angle 1 = 50°$, $\angle 2 = 65°$.

Найти: $\angle ABC$.

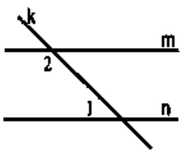


Рис. 3.90

Вариант II

1) Рис. 3.90.

Дано: $m \parallel n$, $\angle 2$ больше $\angle 1$ на 30°.

Найти: $\angle 1$, $\angle 2$.

2) Рис. 3.91.

Дано: $a \parallel b$, $\angle 2 + \angle 5 = 240°$.

Найти: $\angle 1$, $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 6$, $\angle 7$, $\angle 8$.

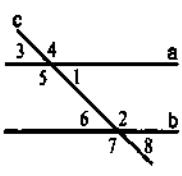


Рис. 3.91

3) Рис. 3.92.

Дано: $CD \parallel EF$, $\angle 1 = 40°$, $\angle 2 = 75°$.

Найти: $\angle DEF$.

Ответы для самопроверки (подготовить заранее на переносной доске или на ее обратной стороне):

Вариант I

1) $\angle 2 = 60°$, $\angle 1 = 120°$.

2) $\angle 4 = \angle 7 = 61°$, $\angle 3 = \angle 5 = \angle 6 = \angle 8 = 119°$.

3) $\angle ABC = 115°$.

Вариант II

1) $\angle 1 = 75°$, $\angle 2 = 105°$.

2) $\angle 4 = \angle 7 = 120°$, $\angle 1 = \angle 3 = \angle 6 = \angle 8 = 60°$.

3) $\angle DEF = 115°$.

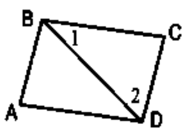
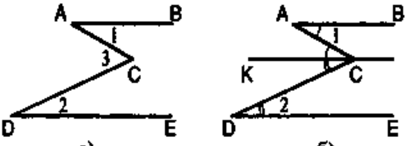


Рис. 3.92



а) б)

Рис. 3.93

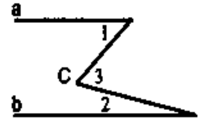


Рис. 3.94

2. Решить задачу (один ученик решает у доски, остальные в тетрадях):

Дано: $AB \parallel DE$ (рис. 3.93 а).

Доказать: $\angle 1 + \angle 2 = \angle 3$.

Подсказка: через точку C проведите прямую, параллельную AB.

Доказательство (см. рис. 3.93 б): Через точку C, не лежащую на прямой AB, можно провеети прямую, параллельную AB, и притом только одну.

Так как $KC \parallel AB$, а $AB \parallel DE$ по условию задачи, то $KC \parallel DE$.

$\angle 1 = \angle ACK$ как накрест лежащие при параллельных прямых AB и KC и секущей AC.

$\angle 2 = \angle KCD$ как накрест лежащие при параллельных прямых KC и DE и секущей DC.

Так как $\angle 1 = \angle ACK$, $\angle 2 = \angle KCD$, а $\angle 3 = \angle ACK + \angle KCD$, то $\angle 3 = \angle 1 + \angle 2$, что и требовалось доказать.

Наводящие вопросы:

1) Для чего проведена прямая, проходящая через точку C и параллельная прямой AB?

2) Параллельна ли прямая KC прямой DE?

3) Что вы можете сказать об углах *1* и ACK, *2* и KCD?

4) Чему равна сумма углов ACK и KCD?

IV. Самостоятельное решение задач

(Учащиеся сами выбирают, задачи какого уровня они будут решать. В конце урока тетради можно собрать на проверку.)

I уровень

1. Рис. 3.94.

Дано: $\angle 1 = 60°$, $\angle 2 = 20°$, $a \parallel b$.

Найти: $\angle 3$.

Решение: Через точку C провести прямую, параллельную прямой a, и доказать, что $\angle 3 = \angle 1 + \angle 2$, $\angle 3 = 80°$.

2. Рис. 3.95.

Дано: $\angle AOP = 80°$, $\angle OPS = 80°$, $\angle FSP = 40°$.

Найти: $\angle OFK$, $\angle KFB$.

Решение: $\angle AOP = \angle OPS$, тогда $AB \parallel CD$, тогда $\angle OFK = 40°$, $\angle KFB = 140°$.

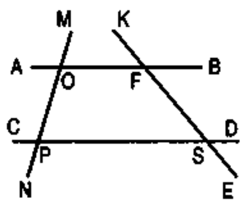


Рис. 3.95

3. Рис. 3.96.

Найти: x, y.

Решение: $\angle E + \angle F = 180°$, тогда $EK \parallel FP$, поэтому $x = 50°$, $y = 130°$.

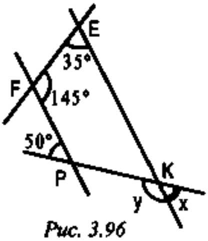


Рис. 3.96

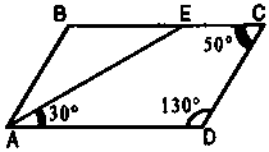


Рис. 3.97

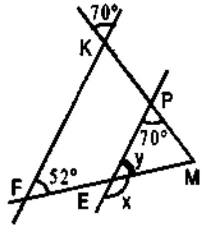


Рис. 3.98

4. Рис. 3.97.

Дано: AE – биссектриса $\angle BAD$.

Найти: $\angle ABE$, $\angle BEA$.

Решение: $\angle C + \angle D = 180°$, значит, $BC \parallel AD$, тогда $\angle BEA = \angle EAD = 30°$. AE – биссектриса $\angle BAD$, поэтому $\angle BAE = \angle EAD = 30°$, а $\angle BAD = 60°$. $BC \parallel AD$, значит, $\angle ABE + \angle BAD = 180°$, тогда $\angle ABE = 120°$.

II уровень

1. Рис. 3.98.

Найти: x, y.

Указание: Докажите, что $PE \parallel KF$ из равенства углов, градусные меры которых 70°, тогда $y = 52°$, $x = 128°$.

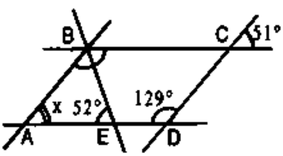


Рис. 3.99

2. Рис. 3.99.

Найти: x, если $\angle ABE = \angle CBE$.

Решение: $\angle C + \angle D = 180°$, значит, $BC \parallel AD$, тогда $\angle AEB = \angle EBC = 52°$. $\angle ABE = \angle CBE$, поэтому $\angle ABC = 104°$.

Так как $BC \parallel AD$, а $\angle ABC = 104°$, то $\angle BAE = 76°$, то есть $x = 76°$.

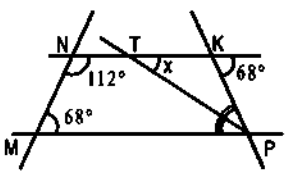


Рис. 3.100

3. Рис. 3.100.

Дано: PT – биссектриса $\angle KPM$.

Найти: x.

Решение: $\angle M + \angle N = 180°$, значит, $NK \parallel MP$, тогда $\angle K = \angle KPM = 68°$. PT – биссектриса $\angle KPM$, значит, $\angle TPM = 34°$.

$NK \parallel MP$, тогда $\angle TPM = \angle PTK = 34°$, то есть $x = 34°$.

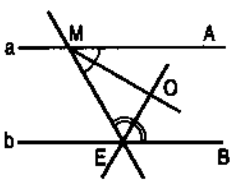


Рис. 3.101

4. Рис. 3.101.

Дано: $a \parallel b$.

Найти: $\angle MOE = 90°$.

Указание: Через точку O провести прямую, параллельную прямой MA, и доказать $\angle MOE = \angle AMO + \angle OEB$.

Так как $a \parallel b$, то $\angle AME + \angle MEB = 180°$, но $\angle AMO = 1/2 \angle AME$, $\angle OEB = 1/2 \angle MEB$, тогда $\angle AMO + \angle OEB = 1/2 (\angle AME + \angle MEB) = 90°$, то есть $\angle MOE = 90°$.

Домашнее задание

Решить задачи № 208, 210, 211, 212.

Урок 38. Решение задач по теме «Параллельные прямые»

Цель урока:

совершенствование навыков решения задач на применение свойств и признаков параллельности прямых.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Проверка домашнего задания. Повторение

1. Проверить домашнее задание – № 211.

(Предложить двум ученикам заранее подготовить решение задачи на доске.)

Задача № 211 (а)

Рис. 3.102.

Дано: $a \parallel b$, c – секущая, $\angle ABC$ и $\angle BCD$ – накрест лежащие, BE – биссектриса $\angle ABC$, CK – биссектриса $\angle BCD$.

Доказать: $BE \parallel CK$.

Доказательство: Так как $\angle ABC$ и $\angle BCD$ – накрест лежащие при параллельных a и b и секущей c, то $\angle ABC = \angle BCD$.

Учитывая, что BE и KC – биссектрисы углов ABC и BCD, получаем $\angle EBC = \angle BCK$, то есть накрест лежащие углы EBC и BCK при прямых BE и KC и секущей BC равны, значит, $BE \parallel KC$.

Итак, биссектрисы накрест лежащих углов параллельны.

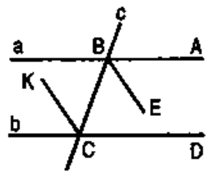


Рис. 3.102

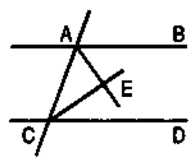


Рис. 3.103

Задача № 211 (б)

Рис. 3.103.

Дано: $AB \parallel CD$, AC – секущая, AE – биссектриса $\angle BAC$, CE – биссектриса $\angle ACD$, $\angle BAC$ и $\angle ACD$ – односторонние.

Доказать: $AE \perp CE$.

Доказательство: Так как $AB \parallel CD$, то $\angle BAC + \angle ACD = 180°$.

AE – биссектриса $\angle BAC$, CE – биссектриса $\angle ACD$, поэтому $\angle CAE = 1/2\ \angle BAC$, $\angle ACE = 1/2\ \angle ACD$, получаем $\angle CAE + \angle ACE = 1/2\ (\angle BAC + \angle ACD) = 90°$, следовательно, $\angle AEC = 90°$.

Итак, биссектрисы односторонних углов перпендикулярны.

2. Решение задач по готовым чертежам.

I уровень (устно – фронтальная работа с менее подготовленными учениками, рисунки к задачам подготовить на доске заранее.)

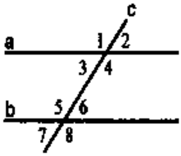


Рис. 3.104

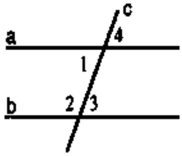


Рис. 3.105

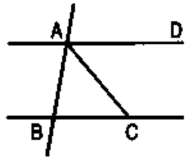


Рис. 3.106

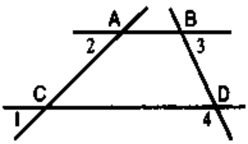


Рис. 3.107

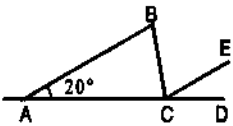


Рис. 3.108

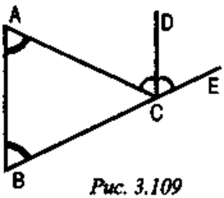


Рис. 3.109

1) Рис. 3.104.

Дано: $a \parallel b$; $\angle 3 = 58°$.

Найти остальные углы.

2) Рис. 3.105.

Дано: $\angle 1$ меньше $\angle 2$ на 40°.

Найти: $\angle 3$, $\angle 4$.

3) Рис. 3.106.

Дано: $AD \parallel BC$, $\angle ACB = 50°$, AC – биссектриса $\angle BAD$.

Найти: $\angle ABC$.

II уровень (самостоятельно с последующей самопроверкой)

Условия задач раздать каждому ученику, ответы и указания к задачам раздать учащимся, испытывающим трудности при решении задач.

1) Рис. 3.107.

Дано: $\angle 1 = \angle 2 = 35°$, $\angle 3$ меньше $\angle 4$ на 50°.

Найти: $\angle 3$, $\angle 4$.

2) Рис. 3.108.

Дано: $AB \parallel CE$; $\angle BAC = 20°$; $\angle BCE : \angle ECD = 4 : 1$.

Найти: $\angle BCD$.

3) Рис. 3.109.

Дано: $\angle A = \angle B$, $\angle ACD = \angle ECD$.

Доказать: $AB \parallel CD$.

Ответы и указания для самопроверки:

1) $\angle 1 = \angle 2 = 35°$, значит, $AB \parallel CD$, тогда $\angle 3 = \angle BDC$, но $\angle BDC$ и $\angle 4$ – смежные и $\angle BDC + \angle 4 = 180°$.

$\angle 3 + \angle BDC$ на 50° меньше $\angle 4$, поэтому $\angle BDC + 50° + \angle BDC = 180°$, откуда $\angle BDC = 65°$, значит, $\angle 3 = 65°$, $\angle 4 = 115°$. (*Ответ*: $\angle 3 = 65°$, $\angle 4 = 115°$.)

2) $AB \parallel CE$, значит, $\angle BAC = \angle ECD = 20°$. $\angle BCE : \angle ECD = 4 : 1$, значит, $\angle BCE = 80°$. $\angle BCD = \angle BCE + \angle ECD = 100°$. (*Ответ*: $\angle BCD = 100°$.)

3) Пусть $\angle A = \angle B = x$, тогда $\angle ACB = 180° - 2x$, а $\angle ACE = 180° - \angle ACB = 2x$.

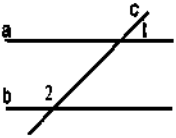


Рис. 3.110

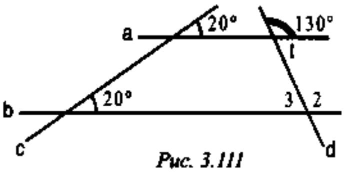


Рис. 3.111

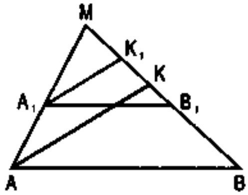


Рис. 3.112

Так как $\angle ACD = \angle ECD$, а $\angle ACE = 2x$, то $\angle ACD = x$.

Получили, что $\angle A = \angle ACD = x$, значит, $AB \parallel CD$.

III. Самостоятельная работа

(Тетради в конце урока собрать на проверку.)

I уровень

Вариант I

1. Рис. 3.110.

Дано: $a \parallel b$, $\angle 2$ в 3 раза больше $\angle 1$.

Найти: $\angle 1$, $\angle 2$.

2. Рис. 3.111.

Найти: $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$.

3. Дан прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$), $E \in AC$, $F \in AB$, $EF \parallel CB$, EK – биссектриса треугольника AEF. Чему равен угол AEK?

4*. Рис. 3.112.

Дано: $AB \parallel A_1B_1$, AK – биссектриса $\angle MAB$, A_1K_1 – биссектриса $\angle MA_1B_1$.

Доказать: $\angle MA_1K_1 = \angle MAK$. Могут ли пересекаться прямые A_1K_1 и AK?

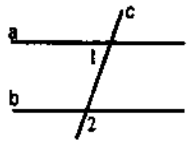


Рис. 3.113

Вариант II

1. Рис. 3.113.

Дано: $a \parallel b$, $\angle 1$ на 40° меньше $\angle 2$.

Найти: $\angle 1$, $\angle 2$.

2. Рис. 3.114.

Найти: $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$.

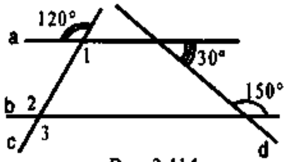


Рис. 3.114

3. Дан прямоугольный треугольник MEF ($\angle E = 90°$), $C \in ME$, $D \in MF$, $CD \parallel EF$, $K \in MD$. Чему равен $\angle MCK$, если $\angle KCD = 40°$?

4*. Рис. 3.115.

Дано: $DE \parallel AC$, EM – биссектриса $\angle DEC$, CN – биссектриса $\angle BCK$.

Доказать: $\angle MEC = \angle ECN$. Имеют ли общие точки прямые ME и CN?

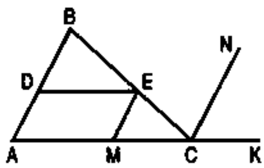


Рис. 3.115

II уровень

Вариант I

1. Рис. 3.116.

Дано: $AC \parallel BD$, $AC = AB$, $\angle MAC = 40°$.

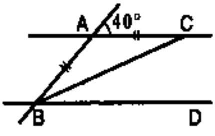


Рис. 3.116

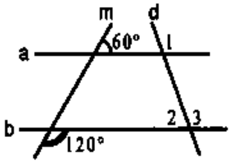


Рис. 3.117

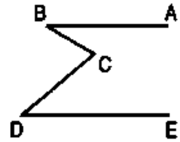


Рис. 3.118

Найти: $\angle CBD$.

2. Рис. 3.117.

Дано: $\angle 1$ на 38° больше $\angle 2$.

Найти: $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$.

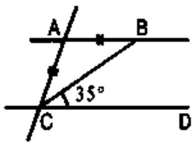


Рис. 3.119

3. Отрезки CD и AB пересекаются в точке O так, что $AO = OB$, $AC \parallel DB$.

Докажите, что $\Delta AOC = \Delta DOB$.

4*. Рис. 3.118.

Дано: $AB \parallel DE$, $\angle ABC = 30°$, $\angle EDC = 40°$.

Найти: $\angle BCD$.

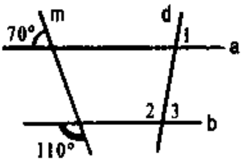


Рис. 3.120

Вариант II

1. Рис. 3.119.

Дано: $AB \parallel CD$, $AC = AB$, $\angle BCD = 35°$.

Найти: $\angle CAB$.

2. Рис. 3.120.

Дано: $\angle 1$ на 24° меньше $\angle 2$.

Найти: $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$.

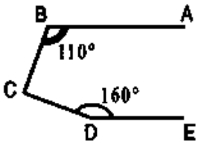


Рис. 3.121

3. В четырехугольнике $ABCD$ $BC = AD$ и $BC \parallel AD$.

Докажите, что $\Delta ABC = \Delta ADC$.

4*. Рис. 3.121.

Дано: $AB \parallel DE$, $\angle ABC = 110°$, $\angle CDE = 160°$.

Докажите: $BC \perp CD$.

III уровень

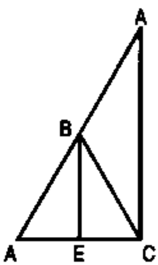


Рис. 3.122

Вариант I

1. Рис. 3.122.

Дано: $AB = BD = BC$, $BE \parallel DC$.

Доказать: $DC \perp AC$.

2. Рис. 3.123.

Дано: $BE \parallel AF$, $AB \parallel DE$, $AB = CD$.

Доказать: $\Delta BCE = \Delta ADF$.

3. Рис. 3.124.

Дано: $\angle BED = 70°$, $\angle EDC = 20°$, $AB \parallel CD$.

Найти: $\angle ABC$.

4*. Внутри треугольника ABC отмечена точка F. Через нее проведены прямые, параллельные сторонам AC и AB и пересекающие сторону BC соответственно в точках M и E, $FM = MC$, $FE = EB$. *Докажите*, что F — точка пересечения биссектрис ΔABC.

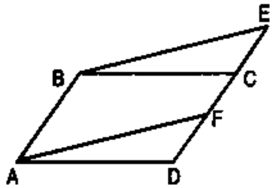


Рис. 3.123

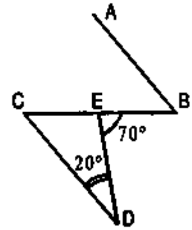


Рис. 3.124

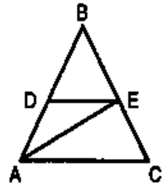


Рис. 3.125

Вариант II

1. Рис. 3.125.

Дано: $AB = AC$, $AD = DE$, $DE \parallel AC$.

Доказать: $AE \perp BC$.

2. Рис. 3.126.

Дано: $AB = CD$, $BC \parallel AD$, $DF \parallel BE$.

Доказать: $\Delta\ FAD = \Delta\ CBE$.

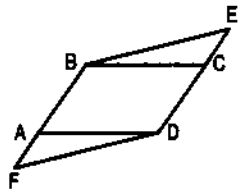


Рис. 3.126

3. Рис. 3.127.

Дано: $AB \parallel CD$, $\angle ABC = 30°$, $\angle CDE = 40°$.

Найти: $\angle BED$.

4*. Внутри $\Delta\ ABC$ выбрана точка M. Через нее проведена прямая, параллельная стороне AC и пересекающая стороны AB и BC соответственно в точках D и E, причем $MD = AD$ и $ME = EC$.

Докажите, что M – точка пересечения биссектрис треугольника.

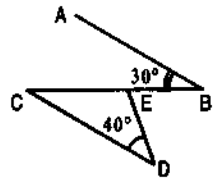


Рис. 3.127

Домашнее задание

Решить задачи:

Задача 1

Рис. 3.128.

Дано: $\angle 1 : \angle 2 = 5 : 4$.

Найти: $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$.

Решение (см. рис. 3.129): $\angle 5 = 128°$, следовательно, $a \parallel b$. $a \parallel b$, тогда $\angle 2 = \angle 3 = \angle 6$, а $\angle 1 + \angle 6 = 180°$, тогда $\angle 1 + \angle 2 = 180°$.

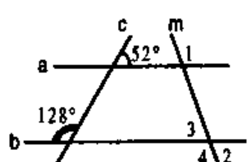


Рис. 3.128

Так как $\angle 1 : \angle 2 = 5 : 4$, то $\angle 1 = 5x$, $\angle 2 = 4x$, тогда $5x + 4x = 180°$, $x = 20°$.

Значит, $\angle 1 = 100°$, $\angle 4 = 100°$, $\angle 2 = 80°$, $\angle 3 = 80°$. (*Ответ*: $\angle 1 = \angle 4 = 100°$, $\angle 2 = \angle 3 = 80°$.)

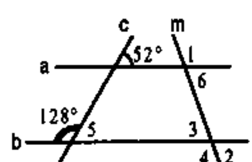


Рис. 3.129

Задача 2

Рис. 3.130.

Дано: $AC \parallel BD$, $AB = AC$, $\angle ACB = 25°$.

Найти: $\angle DBE$.

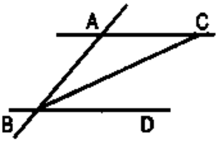


Рис. 3.130

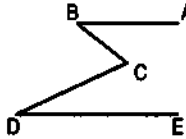


Рис. 3.131

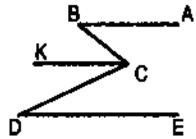


Рис. 3.132

Решение: $AC \parallel BD$, поэтому $\angle ACB = \angle CBD = 25°$.

$AB = AC$, тогда ΔABC – равнобедренный, $\angle ABC = \angle ACB = 25°$, значит, $\angle ABD = 50°$, а $\angle DBE = 130°$. (*Ответ*: $\angle DBE = 130°$.)

Задача 3

Рис. 3.131.

Дано: $AB \parallel DE$, $\angle BCD = 70°$, $\angle ABC : \angle EDC = 3 : 4$.

Найти: $\angle ABC$, $\angle EDC$.

Решение (см. рис. 3.132): $CK \parallel AB$, по условию $AB \parallel DE$, тогда $CK \parallel DE$, значит, $\angle ABC = \angle BCK$, $\angle KCD = \angle CDE$, а $\angle BCD = \angle BCK + \angle KCD = \angle ABC + \angle CDE = 70°$.

Так как $\angle ABC : \angle EDC = 3 : 4$, то $\angle ABC = 3x$, $\angle EDC = 4x$, тогда $3x + 4x = 70°$, $x = 10°$. $\angle ABC = 30°$, $\angle EDC = 40°$. (*Ответ*: $\angle ABC = 30°$, $\angle EDC = 40°$.)

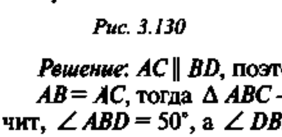


Рис. 3.133

Задача 4

Рис. 3.133.

Дано: $DC \parallel BE$, $\angle CDB = 40°$, $\angle CBD$ на $20°$ больше $\angle CBE$.

Найти: $\angle ABC$.

Решение: $DC \parallel BE$, $\angle CDB = 40°$, значит, $\angle ABE = \angle CDB = 40°$.

$\angle ABE = 40°$, тогда $\angle EBD = 140°$, а так как $\angle EBD = \angle EBC + \angle CBD$ и $\angle CBD$ на $20°$ больше $\angle EBC$, то $2\angle EBC + 20° = 140°$, $\angle EBC = 60°$.

Так как $\angle ABC = \angle ABE + \angle EBC$, $\angle ABE = 40°$, $\angle EBC = 60°$, то $\angle ABC = 100°$. (*Ответ*: $\angle ABC = 100°$.)

Урок 39. Решение задач

Цели урока:

1) подготовить учащихся к предстоящей контрольной работе по теме «Параллельные прямые»;
2) совершенствовать навыки решения задач по теме «Параллельные прямые».

Ход урока

I. Организационный момент

Сформулировать тему урока и его цели.

II. Актуализация знаний учащихся

1. Заслушать устно решение задач домашней работы.

(На доске заранее подготовить рисунки с условиями задач. По указанию учителя один из учащихся выходит к доске и рассказывает решение первой задачи, остальные учащиеся внимательно его слушают, а затем исправляют его ошибки. Таким же образом решаются другие задачи.)

2. Решение задач самостоятельной работы предыдущего урока.

I уровень

(Работа ведется устно по готовым чертежам.)

1. Рис. 3.134.

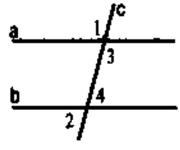


Рис. 3.134

Дано: $a \parallel b$, $\angle 2$ на 24° меньше $\angle 1$.

Найти: $\angle 1$, $\angle 2$.

Решение: $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$ как вертикальные.

Так как $a \parallel b$, то $\angle 3 + \angle 4 = 180°$.

$\angle 2$ на 24° меньше $\angle 1$, тогда $\angle 2 = x$.

$\angle 1 = x + 24°$, тогда $x + x + 24° = 180°$, $x = 78°$.

$\angle 2 = 78°$, $\angle 1 = 102°$. (*Ответ*: $\angle 1 = 102°$, $\angle 2 = 78°$.)

2. Рис. 3.135.

Найти: $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$.

Решение: Сумма односторонних углов при прямых a и b и секущей равна 180°, значит, $a \parallel b$.

Угол, равный 140°, и $\angle 1$ – смежные, значит, $\angle 1 = 40°$.

$\angle 1 = \angle 2$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых a и b и секущей d, значит, $\angle 2 = 40°$.

$\angle 1 + \angle 3 = 180°$, так как $\angle 1$ и $\angle 3$ – соответственные при прямых a и b и секущей d, значит, $\angle 3 = 140°$. (*Ответ*: $\angle 1 = 40°$, $\angle 2 = 40°$, $\angle 3 = 140°$.)

3. Рис. 3.136.

Дано: $BC \parallel EF$, $\angle C = 90°$, $\angle KEF = 30°$.

Найти: $\angle KEA$.

Решение: $BC \parallel EF$, тогда $\angle C = \angle FEA = 90°$.

Так как $\angle FEA = 90°$, $\angle KEF = 30°$, то $\angle KEA = 60°$. (*Ответ*: $\angle KEA = 60°$.)

4. Рис. 3.137.

Дано: $AB \parallel CD$, BE – биссектриса $\angle DBA$, DF – биссектриса $\angle CDM$.

Пересекаются ли прямые DF и BE?

Решение: $CD \parallel AB$, поэтому $\angle MDC = \angle DBA$. BE – биссектриса $\angle DBA$, DF – биссектриса $\angle CDM$, значит, $\angle MDF = \angle DBE$, поэтому $BE \parallel DB$, а значит, BE и DB не пересекаются.

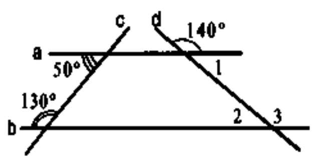


Рис. 3.135

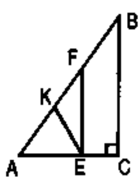


Рис. 3.136

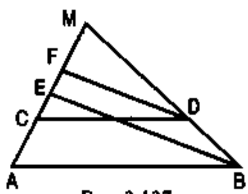


Рис. 3.137

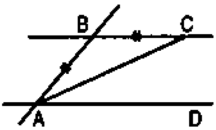


Рис. 3.138

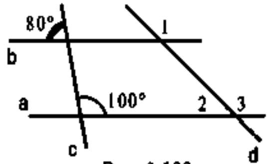


Рис. 3.139

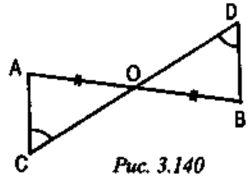


Рис. 3.140

II, III уровни

Решить самостоятельно в группах по 3-4 ученика. Наиболее подготовленных учащихся можно назначить консультантами, по необходимости можно пользоваться ответами и указаниями к данным задачам.

1. Рис. 3.138.

Дано: $AD \parallel BC$, $AB = BC$, $\angle ABC = 140°$.

Найти: $\angle ACB$.

Решение: $\angle ABC = 140°$, $AD \parallel BC$, значит, $\angle BAD = 40°$. ΔABC – равнобедренный, поэтому $\angle BAC = \angle BCA$.

Но $\angle BCA = \angle CAD$, так как $BC \parallel AD$, следовательно, $\angle BAC = \angle CAD = 20°$ и $\angle ACB = 20°$ тоже. (*Ответ*: $\angle ACB = 20°$.)

2. Рис. 3.139.

Дано: $\angle 1 : \angle 2 = 3 : 1$.

Найти: $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$.

Решение: $a \parallel b$, $\angle 2 + \angle 3 = 180°$. Так как $a \parallel b$, то $\angle 3 = \angle 1$, следовательно $\angle 1 + \angle 2 = 180°$.

$\angle 1 : \angle 2 = 3 : 1$, значит, $\angle 1 = 3x$, $\angle 2 = x$, тогда $3x + x = 180°$, $x = 45°$. Тогда $\angle 1 = 135°$, $\angle 3 = 135°$, $\angle 2 = 45°$. (*Ответ*: $\angle 1 = \angle 3 = 135°$, $\angle 2 = 45°$.)

3. Отрезки CD и AB пересекаются в точке O так, что $AO = BO$, $\angle AOC = \angle BDO$.

Докажите, что $CO = DO$.

Доказательство (рис. 3.140): Так как $\angle ACO = \angle BDO$, то $AC \parallel BD$, значит, $\angle CAO = \angle DBO$.

$\angle AOC = \angle BOD$ как вертикальные. $\Delta AOC = \Delta BOD$ по стороне и прилежащим к ней углам, значит, $CO = DO$.

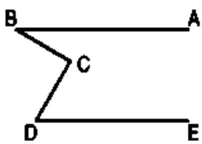


Рис. 3.141

4. Рис. 3.141.

Дано: $AB \parallel DE$, $BC \perp CD$, $\angle ABC = 30°$.

Найти: $\angle CDE$.

Решение (см. рис. 3.142):

Проведем $CK \parallel AB$, так как $AB \parallel DE$, то $CK \parallel DE$.

Тогда $\angle KCB = \angle CBA = 30°$, $\angle KCD = \angle CDE$.

Так как $BC \perp CD$, то $\angle BCD = 90°$, а $\angle KCD = 60°$, значит, $\angle CDE = 60°$. (*Ответ*: $\angle CDE = 60°$.)

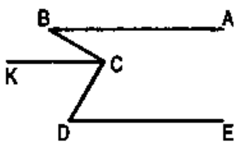


Рис. 3.142

5. Рис. 3.143.

Дано: $AB = AC$, $AE = EK$, $EK \parallel AC$.

Доказать: $BK = KC$.

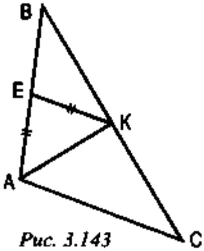


Рис. 3.143

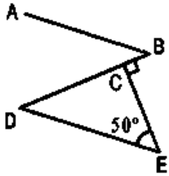


Рис. 3.144

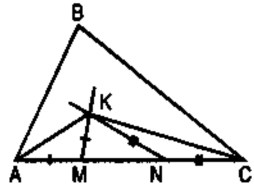


Рис. 3.145

Доказательство: $AE = EK$, значит, ΔAEK – равнобедренный, $\angle EAK = \angle EKA$. Но $EK \parallel AC$, значит, $\angle EKA = \angle KAC$ и AK – биссектриса равнобедренного ΔABC ($AB = AC$), а значит, и медиана, т.е. $BK = KC$.

6. Рис. 3.144.

Дано: $AB \parallel DE$, $DB \perp CE$, $\Delta CED = 50°$.

Найти: ΔABC.

Решение аналогично задаче 4.

7. Внутри треугольника ABC отмечена точка K. Через нее проведены прямые, параллельные сторонам AB и BC и пересекающие стороны AB и BC соответственно в точках M и N, причем $MK = MA$, $NK = NC$. Докажите, что K – точка пересечения биссектрис треугольника ABC.

Решение (см. рис. 3.145): $AM = MK$, тогда ΔAMK – равнобедренный и $\angle MAK = \angle MKA$. $MK \parallel AB$, тогда $\angle MKA = \angle KAB$.

$\angle MAK = \angle KAB$, тогда AK – биссектриса $\angle BAC$.

$KN = NC$, тогда ΔKNC – равнобедренный и $\angle NKC = \angle NCK$.

$KN \parallel BC$, тогда $\angle NKC = \angle KCB$.

$\angle NCK = \angle KCB$, тогда CK – биссектриса $\angle ACB$, а точка K – точка пересечения биссектрис ΔABC.

Домашнее задание

Выполнить работу над ошибками.

Решить задачи самостоятельной работы II, III уровней (по одному из вариантов по усмотрению ученика из тех, которые он еще не решал).

Урок 40. Подготовка к контрольной работе

Цели урока:

1) подготовить учащихся к контрольной работе;

2) систематизировать знания учащихся по изучаемой теме.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

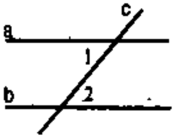


Рис. 3.146

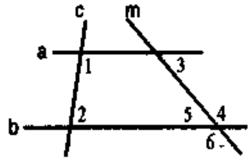


Рис. 3.147

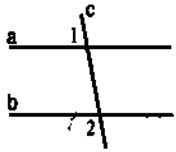


Рис. 3.148

Нет смысла давать подготовительный вариант контрольной работы наиболее подготовленным учащимся, поэтому для таких учащихся данный урок можно посвятить решению задач повышенной сложности, а на дом дать подготовительный вариант контрольной работы II, III уровней.

Решение задач подготовительного варианта контрольной работы I, II уровней – такую цель можно поставить перед менее подготовленными учащимися, а на дом дать задачи на готовых чертежах. Работу на уроке с такими учащимися в зависимости от особенностей класса можно организовать по-разному: это и самостоятельная работа с последующей самопроверкой по готовым решениям, и работа в группах по 3-4 человека также с последующей проверкой, и фронтальная работа со всем классом с подробным анализом и оформлением на доске и в тетрадях учащихся решений задач.

Итак, подготовительный вариант контрольной работы:

I уровень

1. Рис. 3.146.

Дано: $\angle 1 + \angle 2 = 88°$, $a \parallel b$.

Найти все образовавшиеся углы при пересечении прямых a и b и их секущей c.

2. Рис. 3.147.

Дано: $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, $\angle 3 = 48°$.

Найти: $\angle 4$, $\angle 5$, $\angle 6$.

3. Отрезок DM – биссектриса Δ CDE. Через точку M проведена прямая, параллельная стороне CD и пересекающая сторону DE в точке N. Найдите углы треугольника DNM, если $\angle CDE = 68°$.

4*. Прямая EK является секущей для AB и CD ($E \in AB$, $K \in CD$). $\angle AEK = 49°$. При каком значении $\angle CKE$ прямые AB и CD могут быть параллельными?

II уровень

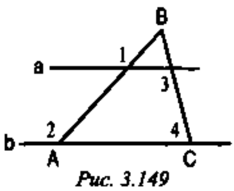


Рис. 3.149

1. Рис. 3.148.

Дано: $a \parallel b$, c – секущая, $\angle 1 : \angle 2 = 4 : 5$.

Найти все образовавшиеся углы.

2. Рис. 3.149.

Дано: $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3$ на 30° больше $\angle 4$.

Найти: $\angle 3$, $\angle 4$.

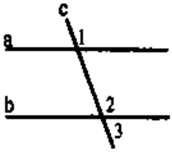


Рис. 3.150

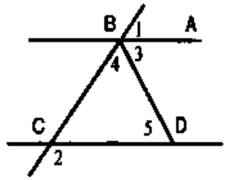


Рис. 3.151

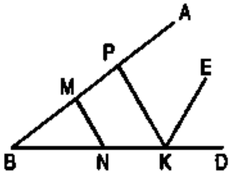


Рис. 3.152

3. Отрезок AD – биссектриса треугольника ABC. Через точку D проведена прямая, пересекающая сторону AC в точке K, так что $DK = AK$.

Найдите углы треугольника ADK, если $\angle BAD = 35°$.

4*. На прямой последовательно отложены отрезки AB, BC, CD. Точки E и P лежат по разные стороны от этой прямой так, что $\angle ABE = \angle PCD = 143°$, $\angle PBD = 49°$, $\angle ACE = 48°$.

а) Докажите, что $BE \parallel PC$.

б) Докажите, что прямые PB и CE пересекаются.

III уровень

1. Рис. 3.150.

Дано: $a \parallel b$, c – секущая, $\angle 3$ меньше суммы углов 1 и 2 на 150°.

Найти: $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$.

2. Рис. 3.151.

Дано: $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, BD – биссектриса $\angle ABC$, $\angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 186°$.

Найти: $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$.

3. Рис. 3.152.

Дано: $MN \parallel PK$, KE – биссектриса $\angle PKD$, $\angle BNM = 78°$.

а) ***Найти***: $\angle BKE$.

б) Пересекаются ли прямые AB и KE, если $\angle BMN = 51°$?

4. В треугольнике ABC $\angle A : \angle B : \angle C = 5 : 6 : 7$. Через вершину C проведена прямая MN так, что $MN \parallel AB$.

Найдите $\angle MCD$, где CD – биссектриса $\angle ACB$.

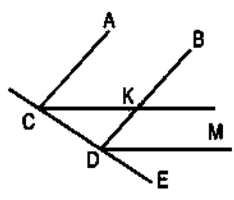


Рис. 3.153

Задачи повышенной сложности

1. Рис. 3.153.

Дано: $AC \parallel BD$, $CK \parallel DM$, $\angle ACK = 48°$, $\angle CDK$ в 3 раза больше $\angle EDM$.

Найти: $\angle KDE$.

2. Рис. 3.154.

Дано: AE – биссектриса ΔABC, $AD = DE$, $AE = EC$, $\angle ACB = 37°$.

Найти: $\angle BDE$.

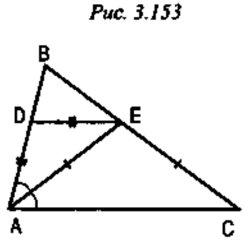


Рис. 3.154

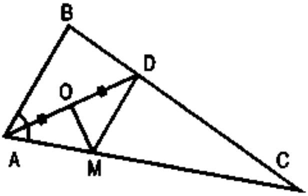


Рис. 3.155

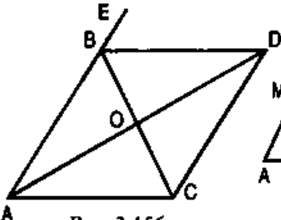


Рис. 3.156

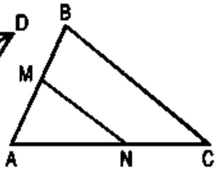


Рис. 3.157

3. Рис. 3.155.
Дано: AD – биссектриса ΔABC, $AO = OD$, $MO \perp AD$.
Доказать: $AB \parallel MD$.
4. Рис. 3.156.
Дано: $AB = BC$, $AO = OD$, $BO = OC$.
Доказать: BD – биссектриса $\angle EBC$.

5. На отрезке AB взята точка C. Через точки A и B проведены по одну сторону от AB параллельные лучи. На них отложены отрезки $AD = AC$ и $BE = BC$. Точка C соединена отрезками прямых с точками D и E. Докажите, что $DC \perp CE$.

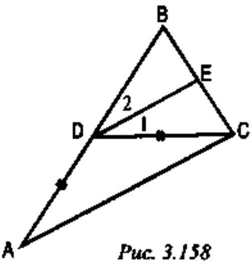


Рис. 3.158

Задачи на готовых чертежах

(Задание на дом для менее подготовленных учащихся.)

1. Рис. 3.157.
Дано: $AM = AN$, $\angle MNC = 117^\circ$, $\angle ABC = 63^\circ$.
Доказать: $MN \parallel BC$.

2. Рис. 3.158.
Дано: $AD = DC$, $DE \parallel AC$, $\angle 1 = 30^\circ$.
Найти: $\angle 2$, $\angle 3$.

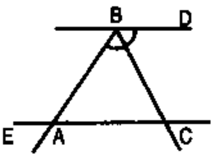


Рис. 3.159

3. Рис. 3.159.
Дано: $BD \parallel AC$, BC – биссектриса $\angle ABD$, $\angle EAB = 116^\circ$.
Найти: $\angle BCA$.

4. Рис. 3.160.
Дано: $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $BM = MO$, $NO = NC$.
Доказать: точки M, O, N лежат на одной прямой.

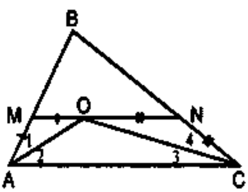


Рис. 3.160

Ответы и указания к задачам:

I уровень

1. $a \parallel b$, тогда $\angle 1 = \angle 2 = 44^\circ$. Другие углы равны 136° и 44°.

2. $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$, тогда $a \parallel b$, следовательно, $\angle 3 = \angle 5 = \angle 6 = 48^\circ$, а $\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$, тогда $\angle 4 = 132^\circ$.

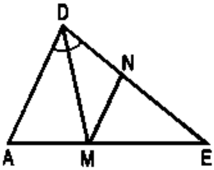
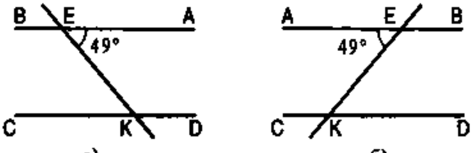


Рис. 3.161



а) б)

Рис. 3.162

3. Рис. 3.161.

DM – биссектриса $\Delta\, CDE$, $\angle CDE = 68°$, тогда $\angle CDM = \angle MDN = 34°$. $CD \parallel MN$, тогда $\angle DMN = \angle CDM = 34°$. $CD \parallel MN$, тогда $\angle NDC + \angle DNM = 180°$.

Значит $\angle DNM = 180° - \angle NDC = 112°$. (*Ответ*: $\angle NDM = \angle NMD = 34°$, $\angle DNM = 112°$.)

4. Рис. 3.162.

Возможны два случая:

а) $\angle AEK = \angle CKE$, $\angle CKE = 49°$, так как $AB \parallel CD$.

б) $\angle AEK + \angle CKE = 180°$, так как $AB \parallel CD$, тогда $\angle CKE = 131°$.

II уровень

1. Рис. 3.163.

$\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$ как вертикальные.

$a \parallel b$, тогда $\angle 3 + \angle 4 = 180°$, значит, $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. $\angle 1 : \angle 2 = 4 : 5$, тогда $\angle 1 = 4x$, $\angle 2 = 5x$. $4x + 5x = 180°$, $x = 20°$, тогда $\angle 1 = 80°$, $\angle 2 = 100°$. (*Ответ*: 4 угла по 80°, 4 угла по 100°.)

2. $\angle 1 = \angle 2$, тогда $a \parallel b$, значит, $\angle 3 + \angle 4 = 180°$. $\angle 3$ на 30° больше $\angle 4$, тогда $\angle 4 + 30° + \angle 4 = 180°$, $\angle 4 = 75°$, $\angle 3 = 105°$. (*Ответ*: $\angle 3 = 105°$, $\angle 4 = 75°$.)

3. Рис. 3.164.

$AK = DK$, тогда $\Delta\, ADK$ – равнобедренный и $\angle DAK = \angle ADK$, но $\angle DAK = \angle BAD$ (*AD* – биссектриса $\angle BAC$), поэтому $\angle BAD = \angle ADK = 35°$, значит, $BA \parallel DK$. Так как $BA \parallel DK$, то $\angle BAK + \angle AKD = 180°$, $\angle AKD = 110°$. (*Ответ*: $\angle DAK = \angle ADK = 35°$, $\angle AKD = 110°$.)

4. Рис. 3.165.

а) $\angle ABE = \angle KBC$ как вертикальные. $\angle KBC = \angle PCD = 143°$, значит $EB \parallel PC$, так как соответственные углы при прямых *BE* и *PC* и секущей *AD* равны.

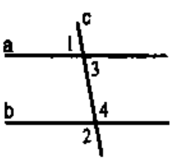


Рис. 3.163

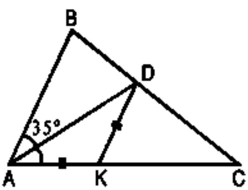


Рис. 3.164

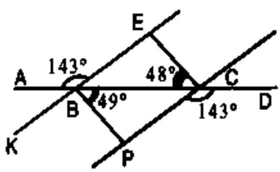


Рис. 3.165

б) $\angle ECB = 48^\circ$, $\angle CBP = 49^\circ$, $\angle ECB \neq \angle CBP$, значит EC и BP не параллельны, то есть пересекаются.

III уровень

1. $a \parallel b$, тогда $\angle 1 = \angle 2$, а $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$, но $\angle 3$ меньше суммы углов 1 и 2 на 150°, тогда $\angle 3 = 2 \cdot \angle 2 - 150^\circ$. $\angle 2 + 2 \cdot \angle 2 - 150^\circ = 180^\circ$, $\angle 2 = 110^\circ$. Тогда $\angle 1 = 110^\circ$, $\angle 2 = 110^\circ$, $\angle 3 = 70^\circ$. (*Ответ*: $\angle 1 = \angle 2 = 110^\circ$, $\angle 3 = 70^\circ$.)

2. $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$, тогда $AB \parallel CD$. BD – биссектриса $\angle ABC$, тогда $\angle 3 = \angle 4$. $AB \parallel CD$, значит, $\angle 3 = \angle 5$, получаем $\angle 3 = \angle 4 = \angle 5$. $\angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 186^\circ$, $\angle 3 = \angle 4 = \angle 5 = 62^\circ$, $\angle ABC = 124^\circ$, $\angle 2 = 124^\circ$, $\angle 1 = 180^\circ - 124^\circ = 56^\circ$. (*Ответ*: $\angle 1 = 56^\circ$, $\angle 2 = 124^\circ$, $\angle 3 = \angle 4 = \angle 5 = 62^\circ$.)

3. а) $MN \parallel PK$, $\angle BNM = 78^\circ$, тогда $\angle BKP = 78^\circ$, $\angle PKD = 102^\circ$. KE – биссектриса $\angle PKD$, тогда $\angle PKE = 51^\circ$, $\angle BKE = \angle BKP + \angle PKE = 78^\circ + 51^\circ = 129^\circ$.

б) $\angle BMN = 51^\circ$, $MN \parallel PK$, тогда $\angle BPK = 51^\circ$. $\angle BPK$ и $\angle PKE$ – накрест лежащие при прямых AB и KE, и $\angle BPK = 51^\circ$, $\angle PKE = 51^\circ$, значит, $AB \parallel KE$, то есть прямые AB и KE не пересекаются.

4. Рис. 3.166. Возможны два случая:

а) $MN \parallel AB$, тогда $\angle B = \angle BCM$, $\angle A = \angle ACN$.

$\angle A : \angle B : \angle C = 5 : 6 : 7$, а $\angle BCM + \angle BCA + \angle ACN = 180^\circ$, тогда $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ и $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 70^\circ$.

CD – биссектриса $\angle BCA$, тогда $\angle BCD = 35^\circ$, $\angle MCD = \angle MCB + \angle BCD = 60^\circ + 35^\circ = 95^\circ$.

б) Если точки M и N переставить, то получим $\angle MCD = \angle ACD + \angle ACM = 35^\circ + 50^\circ = 85^\circ$.

Решение задач повышенной сложности

1. Рис. 3.167.

Так как $AC \parallel BD$, $CK \parallel DM$, то $\angle ACK = \angle BDM = 48^\circ$. $\angle CDK + \angle EDM = 180^\circ - \angle BDM$. $\angle CDK$ в 3 раза больше $\angle EDM$, тогда $3\angle EDM + \angle EDM = 180^\circ - 48^\circ$, $4\angle EDM = 132^\circ$, $\angle EDM = 33^\circ$.

Тогда $\angle KDE = 48^\circ + 33^\circ = 81^\circ$. (*Ответ*: $\angle KDE = 81^\circ$.)

2. $AD = DE$, тогда $\angle DAE = \angle DEA$. AC – биссектриса ΔABC, тогда $\angle DAE = \angle EAC$, значит $\angle EAC = \angle DEA$, следовательно, $DE \parallel AC$. ΔAEC – равнобедренный ($AE = EC$), тогда $\angle EAC = \angle ACE = 37^\circ$, следовательно, $\angle DAC = 74^\circ$.

$DE \parallel AC$, $\angle DAC = 74^\circ$, тогда $\angle BDE = 74^\circ$. (*Ответ*: $\angle BDE = 74^\circ$.)

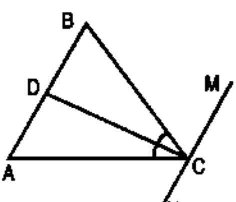


Рис. 3.166

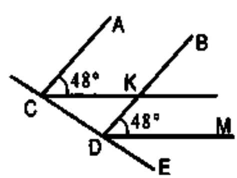


Рис. 3.167

3. $\Delta AOM = \Delta DOM$ по двум сторонам и углу между ними, значит, $\angle MAO = \angle MDO$. $\angle MAO = \angle BAO$, $\angle MAO = \angle MDO$, тогда $\angle BAO = \angle MDO$, значит $AB \parallel MD$.

4. $\Delta BOD = \Delta COA$ по двум сторонам и углу между ними, тогда $\angle OCA = \angle OBD$, то есть $BD \parallel AC$ и $\angle BAC = \angle EBD$.

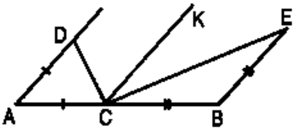


Рис. 3.168

Но $\angle OCA = \angle BAC$, так как ΔABC – равнобедренный ($AB = BC$), тогда $\angle BAC = \angle OBD$. $\angle BAC = \angle EBD$, $\angle BAC = \angle OBD$, значит, $\angle EBD = \angle OBD$, то есть BD – биссектриса $\angle EBC$.

5. Рис. 3.168.

$AD \parallel BE$. Проведем от точки C луч $CK \parallel AD \parallel BE$, тогда $\angle ADC = \angle DCK$, $\angle KCE = \angle CEB$.

ΔADC и ΔCBE – равнобедренные, поэтому $\angle ADC = \angle ACD$, $\angle BCE = \angle BEC$, тогда $\angle ACD = \angle DCK$, $\angle BCE = \angle KCE$ и $\angle ACD + \angle DCK + \angle KCE + \angle BCE = 180°$, а $\angle DCK + \angle KCE = 90°$, т.е. $DC \perp CE$.

Решение задач на готовых чертежах

1. $\angle MNC = 117°$, тогда $\angle MNA = 63°$. ΔAMN – равнобедренный ($AM = AN$), тогда $\angle MNA = \angle NMA = 63°$.

Получили, что соответственные углы NMA и CBA при прямых MN и BC и секущей AB равны, значит, $MN \parallel BC$.

2. ΔADC – равнобедренный ($AD = DC$), значит $\angle DAC = \angle ACD$. $DE \parallel AC$, тогда $\angle DCA = \angle 1 = 30°$, тогда $\angle 3 = 30°$. $\angle 2$ и $\angle 3$ – соответственные при параллельных прямых DE и AC и секущей AB, значит, $\angle 2 = \angle 3 = 30°$. (*Ответ*: $\angle 2 = \angle 3 = 30°$.)

3. $BD \parallel AC$, тогда $\angle EAB = \angle ABD = 116°$. BC – биссектриса $\angle ABD$, тогда $\angle DBC = 58°$. $BD \parallel AC$, значит, $\angle DBC = \angle BCA$, тогда $\angle BCA = 58°$. (*Ответ*: $\angle BCA = 58°$.)

4. ΔBMO – равнобедренный ($BM = MO$), $\angle MBO = \angle MOB$.

Так как $\angle 1 = \angle 2$, а $\angle 1 = \angle MOB$, то $\angle 2 = \angle MOB$, значит, $MO \parallel BC$. ΔNOC – равнобедренный ($NO = NC$), $\angle NOC = \angle 4$, а так как $\angle 3 = \angle 4$, то $\angle NOC = \angle 3$, значит, $NO \parallel BC$.

Через точку O, не лежащую на прямой BC можно провести только одну прямую, параллельную BC, то есть OM и ON – это одна прямая, а это значит, что точки M, O, N лежат на одной прямой.

Урок 41. Контрольная работа №3 по теме «Параллельные прямые» (см. Приложение 1)

Урок 42. Работа над ошибками

Цели урока:

1) устранить пробелы в знаниях учащихся;

2) научить учащихся находить и исправлять свои ошибки;

3) привить навыки самостоятельной работы.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Работа по поиску и исправлению своих ошибок

На уроке подготовки к контрольной работе учащимся был предложен подготовительный вариант контрольной работы, задания которого не существенно отличались от заданий контрольной работы. В ходе решения данных задач у ученика в тетради должны были появиться подробные решения одного-двух уровней, поэтому работу учащихся на данном уроке можно организовать следующим образом:

1) Объединить учащихся в группы по 2–4 человека таким образом, чтобы в каждой группе находились те учащиеся, которые решали один вариант контрольной работы. Учащимся группы предоставить текст контрольной работы с ответами и предложить им найти свои ошибки, исправить их. По необходимости можно консультироваться с учителем.

2) Предложить учащимся решить самостоятельно задачи контрольной работы другого варианта того же уровня в случае, если ученик в контрольной работе допустил серьезные ошибки, и задачи контрольной работы следующего уровня в случае, если в контрольной работе серьезных ошибок нет или их мало.

3) Задание на дом – решить задачи следующего уровня.

Если ученик успешно справился с контрольной работой, то он сразу же приступает к решению задач следующего уровня. В случае, если ученик успешно решил задачи III уровня, то ему предложить дополнительные задачи для решения в классе и дома.

Ответы и указания к задачам контрольной работы:

I уровень

Вариант I

1. Рис. 3.183.

$\angle 1 = \angle 2 = 51°$, $\angle 6 = 51°$, $\angle 7 = 51°$, $\angle 3 = \angle 4 = \angle 5 = \angle 8 = 129°$.

2. Рис. 3.184.

$\angle 3 = \angle 4 = 120°$, $n \parallel m$ ($\angle 1 = \angle 2$).

3. Рис. 3.185.

$\angle DAF = 1/2\ \angle BAC = 36°$, $DF \parallel AB$, $\angle ADF = 36°$, $\angle AFD = 144°$.

4. Возможны два случая (рис. 3.186):

а) $\angle NKE = 115°$; б) $\angle NKE = 65°$.

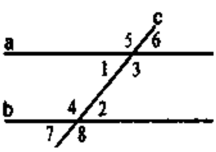


Рис. 3.183

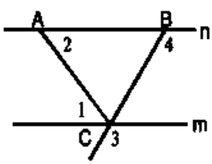


Рис. 3.184

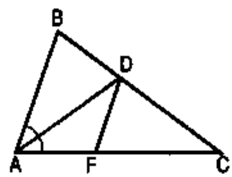
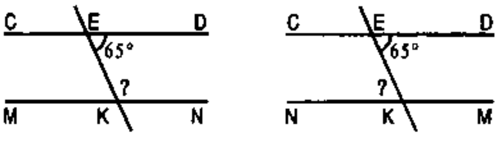


Рис. 3.185



а) б)

Рис. 3.186

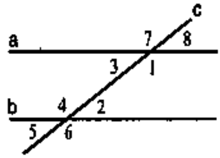


Рис. 3.187

Вариант II

1. Рис. 3.187.

$\angle 2 = 39°$, $\angle 1 = 141°$, $\angle 3 = \angle 8 = \angle 5 = 39°$, $\angle 4 = \angle 6 = \angle 7 = 141°$.

2. Рис. 3.188.

$a \parallel b$ ($\angle 1 = \angle 2$), $\angle 3 + \angle 4 = 180°$, $\angle 4 = 40°$.

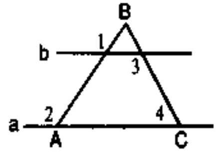


Рис. 3.188

3. Рис. 3.189.

$\angle KAN = 1/2\ \angle CAE = 39°$, $NK \parallel AC$, $\angle AKN = 39°$, $\angle ANK = 141°$.

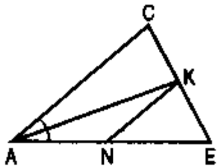


Рис. 3.189

4. Возможны два случая (рис. 3.190):

а) $\angle CNM = 105°$; б) $\angle CNM = 75°$.

II уровень

Вариант I

1. Рис. 3.191.

$\angle 1 = 140°$, $\angle 2 = 40°$, $\angle 7 = \angle 3 = \angle 5 = 140°$, $\angle 4 = \angle 6 = \angle 8 = 40°$.

2. Рис. 3.192.

$a \parallel b$ ($\angle 1 = \angle 2$), $\angle 3 + \angle 4 = 180°$, $\angle 3 = 36°$, $\angle 4 = 144°$

3. Рис. 3.193.

$\angle DMN = \angle MDN = 1/2\ \angle CDE = 37°$, $MN \parallel CD$, тогда $\angle DNM = 143°$.

4. Рис. 3.194.

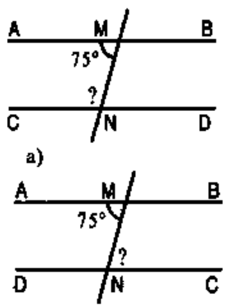
а) $AC \parallel BD$, тогда $\angle ABD = 63°$;

б) $\angle A \neq \angle C$, $AB \cap CD$.

Вариант II

1. Рис. 3.195.

$\angle 1 = 75°$, $\angle 2 = 105°$, $\angle 7 = \angle 3 = \angle 5 = 75°$, $\angle 4 = \angle 6 = \angle 8 = 105°$.



а) б)

Рис. 3.190

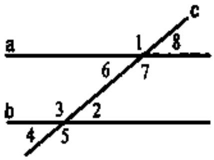


Рис. 3.191

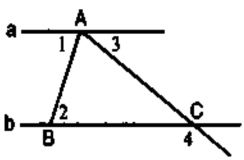


Рис. 3.192

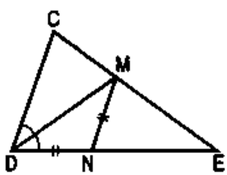


Рис. 3.193

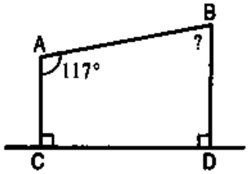


Рис. 3.194

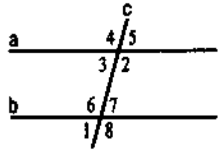


Рис. 3.195

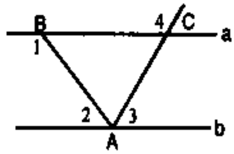


Рис. 3.196

2. Рис. 3.196.
$a \parallel b$ ($\angle 1 + \angle 2 = 180°$), $\angle 3 + \angle 4 = 180°$, $\angle 3 = 55°$, $\angle 4 = 125°$
3. Рис. 3.197.

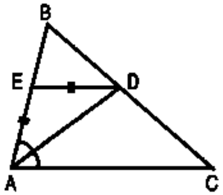


Рис. 3.197

$\angle EAD = \angle EDA = 1/2\ \angle BAC = 32°$, $ED \parallel AC$, тогда $\angle DEA = 148°$.

4. Рис. 3.198.

а) $AC \parallel BD$, тогда $\angle ACD = 135°$;

б) $\angle B \neq PD$, $AB \cap CD$.

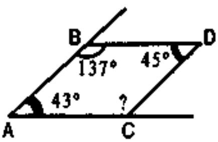


Рис. 3.198

III уровень

Вариант I

1. $\angle 3 = 4 \cdot (\angle 1 + \angle 2)$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 2 + \angle 3 = 180°$.

Тогда $180° - \angle 2 = 4 \cdot (\angle 2 + \angle 2)$, $\angle 2 = \angle 1 = 20°$, $\angle 3 = 160°$.

2. $a \parallel b$ ($\angle 4 = \angle 2$), $\angle 1 = \angle 3$ ($AC = BC$).

$\angle 3 + \angle 4 = 110°$, тогда $\angle 1 + \angle 2 = 110°$, $\angle 5 = 70°$, $\angle 3 = 70°$, $\angle 2 = 40°$, $\angle 4 = 40°$.

3. $AB \parallel KM$, тогда $\angle KME = 34°$.

$\angle KMN = 1/2\ \angle KMC = 73°$, тогда $\angle EMN = 107°$.

4. Возможны два случая (см. рис. 3.199):

а) $\angle MBD = \angle MBA + \angle ABD = 37° + 1/2\,(180° - 37° - 65°) = 76°$ ($\angle MBA + \angle ABC + \angle CBN = 180°$).

б) $\angle MBD = \angle MBC + \angle CBD = 65° + 1/2\,(180° - 37° - 65°) = 104°$ ($\angle NBA + \angle ABC + \angle CBM = 180°$).

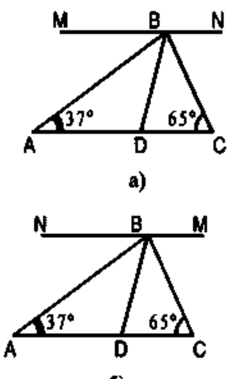


Рис. 3.199

Вариант II

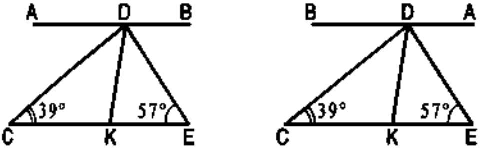
1. $7 \cdot \angle 2 = \angle 3 - \angle 1$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 2 + \angle 3 = 180°$.

Тогда $7 \cdot \angle 2 = (180° - \angle 2) - \angle 2$, $\angle 1 = \angle 2 = 20°$, $\angle 3 = 160°$.

2. $a \parallel b$ ($\angle 2 = \angle 5$), $\angle 1 = \angle 2$ ($AB = AC$).

$\angle 1 + \angle 3 = 130°$, $\angle 5 = 50°$, $\angle 2 = 50°$, $\angle 1 = 50°$, $\angle 4 = 80°$.

3. $MN \parallel CD$, тогда $\angle ACD = 28°$, $\angle DCE = 1/2\ \angle DCB = 76°$, значит, $\angle ACE = 104°$.



а) а)

Рис. 3.200

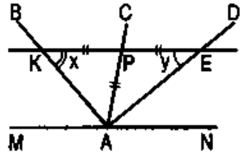


Рис. 3.201

4. Возможны два случая (см. рис. 3.200):

а) $\angle ADC + \angle CDE = \angle EDB = 180°$, $\angle ADK = \angle ADC + \angle CDK = 39° +$ $+ 1/2\,(180° - 39° - 57°) = 81°$.

б) $\angle BDC + \angle CDE + \angle EDA = 180°$, $\angle ADK = \angle ADE + \angle EDK = 57° +$ $+ 1/2\,(180° - 39° - 57°) = 99°$.

Дополнительные задачи

Задача 1

На прямой MN между точками M и N выбрана точка A, и проведены по одну сторону от MN лучи AB, AC и AD. На луче AB выбрана точка K, и через нее проведена прямая, параллельная MN и пересекающая лучи AC и AD соответственно в точках P и E, $KP = PA = PE$.

Докажите, что $AB \perp AD$.

Доказательство (см. рис. 3.201): Пусть $\angle PKA = x$ и $\angle PEA = y$. Так как $KP = PA$ и $PE = PA$, то $\angle KAP = x$ и $\angle PAE = y$. По условию $KE \parallel MN$, значит, $\angle KAM = x$, $\angle EAN = y$. Так как $\angle MAN = 180°$, то $2x + 2y = 180°$, $x + y = 90°$, то есть $\angle KAE = 90°$, $AB \perp AD$.

Задача 2

Дано: BD – медиана ΔABC, $AB = 2BD$ (см. рис. 3.202).

Доказать: BC – биссектриса $\angle DBF$.

Доказательство: Продолжим BD за точку D и отложим отрезок DE, равный BD.

Точки A и E соединим отрезком; $\Delta BDC = \Delta ADE$ по двум сторонам и углу между ними, значит $\angle CBE = \angle BEA$, а $BC \parallel AE$.

Так как $AB = 2BD$, то $AB = BE$ и ΔABE – равнобедренный, а значит $\angle BEA = \angle CBF$. $\angle EBC = \angle CBF$, BC – биссектриса $\angle DBF$.

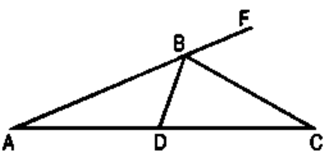


Рис. 3.202

Задача 3

Даны треугольник ABC и точки M и N такие, что середина отрезка BM совпадает с серединой стороны AC, а середина отрезка CN – с серединой стороны AB.

Докажите, что точки M, N и A лежат на одной прямой.

Доказательство (см. рис. 3.203): $\Delta BCK = \Delta MKA$ по двум сторонам и

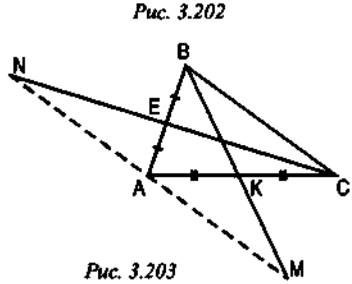


Рис. 3.203

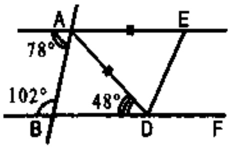


Рис. 3.204

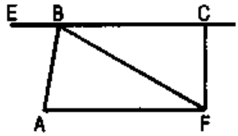


Рис. 3.205

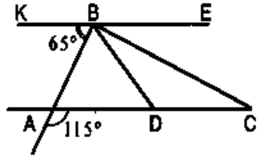


Рис. 3.206

углу между ними ($BK = KM$, $CK = AK$, $\angle BKC = \angle MKA$), значит, $\angle KBC = \angle KMA$ и $BC \parallel AM$.

$\Delta BCE = \Delta ANE$ по двум сторонам и углу между ними ($BE = AE$, $CE = NE$, $\angle BEC = \angle AEC$), значит, $\angle CBE = \angle NAE$ и $BC \parallel AN$.

Через точку A, не лежащую на прямой BC, можно провести только одну прямую, параллельную BC, следовательно, AN и AM – это одна прямая, то есть точки N, A и M лежат на одной прямой.

Задача 4

Найти: углы фигуры $ABDE$ (рис. 3.204).

Решение: $78° + 102° = 180°$, значит, $AE \parallel BD$, следовательно, $\angle EDB + \angle AED = 180°$, но $AD = DE$ и $\angle ADE = \angle AED$, тогда $\angle BDA + \angle ADE + \angle AED = 180°$, $\angle BDA = 48°$, тогда $\angle ADE = \angle AED = 66°$.

Итак, $\angle AED = 66°$, $\angle BDE = 114°$, $\angle ABD = 78°$, $\angle BAE = 102°$.

Задача 5

Рис. 3.205.

Дано: $CF \perp AF$, $CF \perp BC$, $\angle ABF : \angle BAF : \angle AFB = 7 : 8 : 3$.

Найти: углы ΔBEF.

Решение: $\angle ABE + \angle ABF + \angle CBF = 180°$; $\angle ABE = \angle BAF$, $\angle CBF = \angle BFA$ ($BC \parallel AF$, так как $CF \perp AF$, $CF \perp BC$), тогда $\angle BAF + \angle ABF + \angle BFA = 180°$.

Но так как $\angle ABF : \angle BAF : \angle AFB = 7 : 8 : 3$, то $\angle ABF = 70°$, $\angle BAF = 80°$, $\angle AFB = 30°$, тогда $\angle FBC = 30°$, $\angle BCF = 90°$ ($BC \perp CF$), $\angle BFC = \angle AFC - \angle BFA = 90° - 30° = 60°$.

Задача 6

Рис. 3.206.

Дано: $\angle CBE$ меньше $\angle ABE$ на 87° и меньше $\angle ABD$ на 33°.

Найти: углы ΔBCD.

Решение: $65° + 115° = 180°$, тогда $BE \parallel AC$, $\angle ABE = 115°$.

$\angle CBE$ меньше $\angle ABE$ на 87°, тогда $\angle CBE = 28°$.

$\angle CBE$ меньше $\angle ABD$ на 33°, тогда $\angle ABD = 28°$.

$\angle DBC = \angle ABE - (\angle ABD + \angle CBE) = 26°$. $\angle BCD = \angle CBE = 28°$.

$\angle BDC = \angle KBD = 65° + 61° = 126°$.

ГЛАВА IV

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА (уроки 43–62)

Сумма углов треугольника. Соотношения между сторонами и углами треугольника. Неравенство треугольника. Некоторые свойства прямоугольных треугольников. Признаки равенства прямоугольных треугольников. Расстояние от точки до прямой. Расстояние между параллельными прямыми. Задачи на построение.

Основная цель – расширить знания учащихся о треугольниках.

В данной теме рассматривается одна из важнейших теорем курса – теорема о сумме углов треугольника, в которой впервые формулируется неочевидный факт. Теорема позволяет получить важные следствия – свойство внешнего угла треугольника, некоторые свойства и признаки прямоугольных треугольников.

При введении понятий расстояния между параллельными прямыми у учащихся формируется представление о параллельных прямых как равноотстоящих друг от друга (точка, движущаяся по одной из параллельных прямых, все время находится на одном и том же расстоянии от другой прямой), что будет использоваться в дальнейшем курсе геометрии и при изучении стереометрии.

При решении задач на построение в 7 классе рекомендуется ограничиваться только выполнением построения искомой фигуры циркулем и линейкой. В отдельных случаях можно проводить устно анализ и доказательство, а элементы исследования могут присутствовать лишь тогда, когда это оговорено условием задачи.

На изучение темы отводится 20 часов.

Урок 43. Сумма углов треугольника

Цели урока:

1) доказать теорему о сумме углов треугольника, ее следствия;

2) научить решать задачи на применение нового материала.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока и сформулировать цели.

II. Актуализация знаний учащихся

Решить задачи по готовым чертежам (дать учащимся 2–3 минуты на обдумывание, а далее обсудить возможные варианты решений).

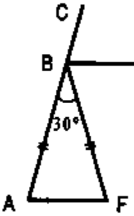


Рис. 4.1

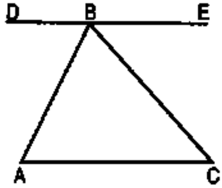


Рис. 4.2

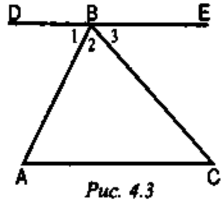


Рис. 4.3

1. Рис. 4.1.
Дано: $AF \parallel BD$, $AB = BF$, $\angle B = 30°$.
Доказать: BD – биссектриса $\angle CBF$.
Найти: $\angle A$, $\angle F$, сумму углов ΔABF.
2. Рис. 4.2.
Дано: $DE \parallel AC$.
Найти: сумму углов ΔABC.

Вторую задачу учащиеся должны решить, если на предыдущих уроках они решали похожие задачи, а их было немало.

После решения данных двух задач учитель задает классу вопрос, в обсуждении которого должен участвовать весь класс.

– Случайно ли сумма углов треугольника ABC оказалась равной 180° или этим свойством обладает любой треугольник? (*У каждого треугольника сумма углов равна 180°.*)

Это утверждение носит название ***теоремы о сумме углов треугольника***. Итак, тема сегодняшнего урока «Сумма углов треугольника».

III. Изучение нового материала

1. **Теорема:** Сумма углов треугольника равна 180°.

– Составьте план доказательства данной теоремы, запишите его в тетради, выполните рисунок.

Двух-трех учеников можно попросить поработать на переносных досках. Возможные записи в тетрадях учащихся и на доске:

Рис. 4.4

План доказательства:

а) Построить $DE \parallel AC$ через вершину В ΔABC (рис. 4.3);
б) Доказать, что $\angle A = \angle 1$, $\angle C = \angle 3$;
в) Доказать, что если $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$, значит, $\angle A + \angle 2 + \angle C = 180°$.

2. ***Определение***: Внешним углом треугольника называется угол, смежный с внутренним.

$\angle BCD$ – смежный с $\angle C$ треугольника ABC (рис. 4.4), значит, $\angle BCD$ – внешний угол этого треугольника.

Задание классу (дать на обдумывание 2–3 минуты, а затем заслушать варианты ответов):

– Докажите, что $\angle BCD = \angle A + \angle B$ и сформулируйте свойство внешнего угла треугольника.

Доказательство: $\angle ACB$ и $\angle BCD$ – смежные и $\angle ACB + \angle BCD = 180°$, значит, $\angle BCD = 180° - \angle ACB$.

Но так как $\angle A + \angle B + \angle ACB = 180°$, то $\angle A + \angle B = 180° - \angle ACB$, отсюда следует, что $180° - \angle ACB = \angle BCD = \angle A + \angle B$, что и требовалось доказать.

Свойство внешнего угла треугольника: **Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.**

IV. Закрепление изученного материала

1. Устно решить задачи № 223 (б, в, г), 225, 226.

Ответы и указания к задачам:

Задача № 223

б) 26°; в) $180° - 3\alpha$; г) 60°.

Задача № 225

$\angle A = \angle B = \angle C$, $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, значит, $\angle A = 60°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 60°$.

Задача № 226

Если бы углы при основании равнобедренного треугольника были прямыми или тупыми, то сумма этих углов была бы уже равна или больше 180°, что противоречит теореме о сумме углов треугольника.

2. Решить задачи №116 и 117 из рабочей тетради (один из учащихся по указанию учителя читает задачу и предлагает свое решение, остальные внимательно слушает его и исправляют допущенные им ошибки).

3. Письменно решить задачи № 228 (в), 227(б) (один ученик работает у доски, а остальные – в тетрадях).

Задача № 228 (в)

Используя задачу № 226, имеем, что 100° – это градусная мера угла, противолежащего основанию равнобедренного треугольника. Значит, сумма углов при основании равна 80°. С учетом того, что углы при основании равнобедренного треугольника равны, имеем, что каждый угол равен 40°. (*Ответ*: 40°, 40°, 100°.)

Наводящие вопросы:

1) Может ли угол при основании равнобедренного треугольника быть равным 100°?

2) Чему равна сумма углов при основании данного треугольника? А каждый из них?

Задача № 227 (б)

Рис. 4.5.

Пусть $\angle C = x$, тогда $\angle BCD = 3x$. Но $\angle C + \angle BCD = 180°$, тогда $x + 3x = 180°$, $x = 45°$, тогда $\angle A = \angle C = 45°$, $\angle B = 90°$. (*Ответ*: 45°, 45°, 90°.)

Рис. 4.5

Наводящие вопросы:

1) Чему равен угол при основании равнобедренного треугольника, если он в три раза меньше внешнего угла, смежного с ним?

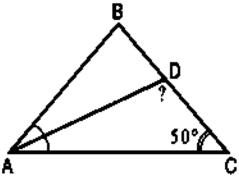


Рис. 4.6

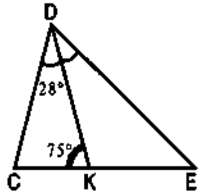


Рис. 4.7

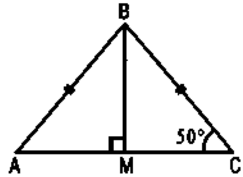


Рис. 4.8

2) Чемы равны другие углы данного треугольника?

V. Самостоятельное решение задач

Самостоятельно решить задачи № 227 (а), 229.

(Учитель контролирует работу менее подготовленных учащихся и консультирует по необходимости остальных.)

Задача № 227 (а)

Рис. 4.5.

Пусть $\angle B = x$, тогда $\angle A = \angle C = 2x$. Так как $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, то $x + x + 2x = 180°$, откуда $x = 36°$, т.е. $\angle B = 36°$, $\angle A = \angle C = 72°$. (*Ответ*: 36°, 72°, 72°.)

Задача № 229

Рис. 4.6.

Δ ABC – равнобедренный с основанием AC, тогда $\angle BAC = \angle BCD = 50°$. AD – биссектриса, значит, $\angle DAC = 25°$.

$\angle DAC + \angle ACD + \angle ADC = 180°$, откуда $\angle ADC = 180° - (\angle DAC + \angle ACD) = 105°$. (*Ответ*: $\angle ADC = 105°$.)

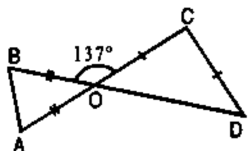


Рис. 4.9

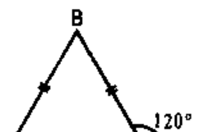


Рис. 4.10

Дополнительные задачи:

1. Рис. 4.7.

Дано: DK – биссектриса, $\angle EDK = 28°$, $\angle CDK = 75°$.

Найти: углы Δ CDE.

(*Ответ*: $\angle CDE = 56°$, $\angle DCE = 77°$, $\angle CED = 47°$.)

2. Рис. 4.8.

Дано: $AB = BC$, $\angle A = 50°$, BM – высота.

Найти: $\angle CBM$.

(*Ответ*: $\angle CBM = 40°$.)

3. Рис. 4.9.

Дано: $OB = OA$, $OC = CD$, $\angle BOC = 137°$.

Найти: углы Δ AOB и Δ CDO.

(*Ответ*: $\angle AOB = 43°$, $\angle A = \angle B = 68°30'$, $\angle COD = \angle CDO = 43°$, $\angle OCD = 94°$.)

4. Рис. 4.10.

Дано: $AB = BC = 5$ см, $\angle BCD = 120°$.

Найти: AC.

(*Ответ*: $AC = 5$ см.)

Домашнее задание

1. § 30, вопросы 1, 2.

2. Решить задачи № 224, 228 (а), 230.

Задача № 224

(*Ответ*: $\angle A = 40°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 80°$.)

Задача № 228 (а)

Возможны два случая:

1) 40° – градусная мера угла при основании, тогда углы данного треугольника равны 40°, 40°, 100°.

2) 40° – градусная мера угла, противолежащего основанию, тогда углы данного треугольника равны 40°, 70°, 70°.

Задача № 230

Рис. 4.11.

Решение: AD и BE – биссектрисы ΔABC, тогда $\angle ABM = 96° : 2 = 48°$, $\angle BAM = 58° : 2 = 29°$.

В ΔABM $\angle ABM + \angle BAM + \angle AMB = 180°$.

Тогда $\angle AMB = 180° - (48° + 29°) = 103°$. (*Ответ*: $\angle AMB = 103°$.)

3. *Дополнительные задачи:*

Задача 1

Рис. 4.12.

Дано: $\angle A = 90°$; CF, DB – биссектрисы ΔACD.

Найти: $\angle COD$.

Решение: $\angle A = 90°$, тогда $\angle ACD + \angle ADC = 180° - \angle A = 90°$.

CF, DB – биссектрисы ΔACD, тогда $\angle DCO = 1/2\ \angle ACD$, $\angle CDO = 1/2\ \angle ADC$, а $\angle DCO + \angle CDO = 1/2\ (\angle ACD + \angle ADC) = 1/2 \cdot 90° = 45°$.

В ΔCDO $\angle DCO + \angle CDO + \angle COD = 180°$, тогда $\angle COD = 180° - (\angle DCO + \angle CDO) = 180° - 45° = 135°$. (*Ответ*: $\angle COD = 135°$.)

Задача 2

Рис. 4.13.

Дано: $AB = BD$, $\angle D = 70°$, AC – биссектриса ΔABD.

Найти: $\angle ACB$.

Решение: $AB = BD$, тогда $\angle BAD = \angle BDA = 70°$.

AC – биссектриса ΔABD, тогда $\angle CAD = 35°$.

В ΔACD $\angle CAD + \angle ADC + \angle ACD = 180°$, тогда $\angle ACD = 75°$.

$\angle ACD + \angle ACB = 180°$, тогда $\angle ACB = 105°$. (*Ответ*: $\angle ACB = 105°$.)

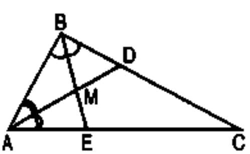


Рис. 4.11

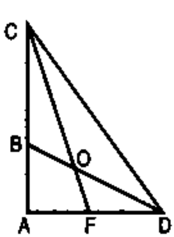


Рис. 4.12

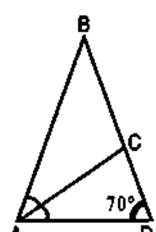


Рис. 4.13

Урок 44. Сумма углов треугольника. Решение задач

Цели урока:

1) ввести понятие остроугольного, прямоугольного, тупоугольного треугольников;
2) совершенствовать навыки решения задач на применение теоремы о сумме углов треугольника.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Повторение. Проверка домашнего задания

1. Теоретический опрос по вопросам 1 и 2. Опрос проводится индивидуально на карточках в письменном виде.

2. Проверить домашние задачи № 228 (а), 230 и дополнительные домашние задачи № 1, 2. (На доске предложить 4 ученикам подготовить рисунки к задачам и записать краткое решение. Заслушать их после решения задач по готовым чертежам.)

3. Решение задач по готовым чертежам.

(Чертежи у рисункам подготовить на доске или планшетах заранее. Фронтальная работа с классом.)

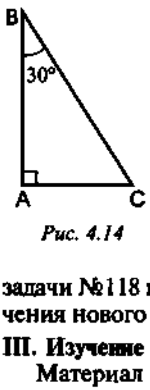


Рис. 4.14

1) Рис. 4.14.
Найти: $\angle C$.
2) Рис. 4.15.
Найти: $\angle A$, $\angle C$, $\angle CBD$.
3) Рис. 4.16.
Дано: $\Delta\ ACE$ – равносторонний.
Найти: $\angle AFB$.
4) Рис. 4.17.
Дано: $BC = AC$.
Найти: $\angle ABD$.

4. Индивидуальная работа в рабочих тетрадях: решить задачи №118 и №119 и тетради сдать на проверку учителю до начала изучения нового материала (задание учащиеся получают в начале урока).

III. Изучение нового материала

Материал урока учащимся знаком, поэтому достаточно его повторить, например, в форме устного теста. Задания теста и варианты отве-

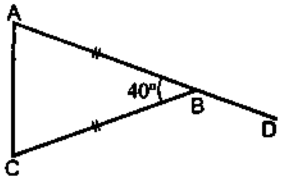


Рис. 4.15

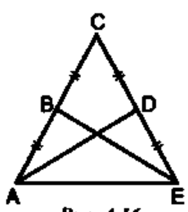


Рис. 4.16

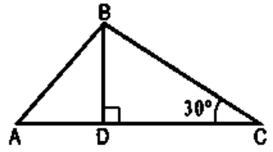


Рис. 4.17

тов зачитываются учителем, учащиеся предлагают вариант ответа с пояснением.

- ***Устный тест:***

1. В треугольнике ABC $\angle A = 90°$, при этом другие два угла:
   а) один острый, другой может быть прямым или тупым;
   б) оба острые;
   в) могут быть как острыми, так и прямыми или тупыми.
2. В треугольнике ABC $\angle B$ – тупой, при этом другие два угла могут быть:
   а) только острыми;
   б) острыми и прямыми;
   в) острыми и тупыми.
3. В тупоугольном треугольнике могут быть:
   а) прямой и острый углы;
   б) тупой и прямой углы;
   в) тупой и острый углы.
4. В остроугольном треугольнике могут быть:
   а) все углы острые;
   б) один тупой угол;
   в) один прямой угол.
5. В прямоугольном треугольнике могут быть:
   а) прямой и тупой углы;
   б) два прямых угла;
   в) два острых угла.

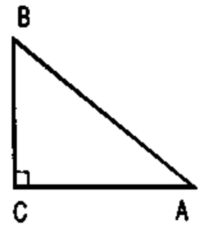


Рис.

Ответы к тесту: *1 (б), 2 (а), 3 (в), 4 (а), 5 (в).*

Далее вводятся понятия гипотенузы и катетов прямоугольного треугольника.

На доске и в тетрадях чертится рисунок и запись: AB – гипотенуза; AC, BC – катеты (см. рис.).

IV. Закрепление изученного материала

1. Решить устно задачу №232 и задачу №129 из рабочей тетради.
2. Решить письменно задачу №231.

Рис. 4.18.

Дано: ΔABC, AM – медиана, $AM = 1/2\ BC$.

Доказать: ΔABC – прямоугольный.

Доказательство: ΔABM – равнобедренный с основанием AB, тогда $\angle MBA = \angle MAB$.

ΔAMC – равнобедренный с основанием AC, тогда $\angle MAC = \angle MCA$.

По теореме о сумме углов треугольника $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180°$.

Так как $\angle BAC = \angle MAB + \angle MAC$, $\angle MBA = \angle MAB$ и $\angle MAC = \angle MCA$, то $\angle ABM + \angle MAB + \angle MAC + \angle MCA = 180°$, $2\angle MAB + 2\angle MAC = 180°$, тогда $\angle MAB + \angle MAC = 90°$, $\angle BAC = 90°$, т.е. ΔABC – прямоугольный.

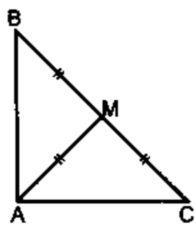


Рис. 4.18

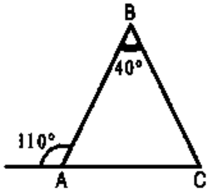


Рис. 4.19

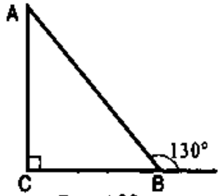


Рис. 4.20

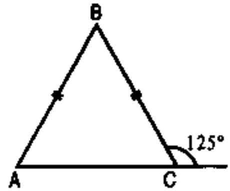


Рис. 4.21

3. Самостоятельное решение задач на готовых чертежах (в тетрадях можно записать только ответы) с последующей самопроверкой по готовым ответам.

I уровень

1) Рис. 4.19.
Найти: $\angle A$, $\angle C$.
(*Ответ*: $\angle A = 70°$, $\angle C = 70°$.)
2) Рис. 4.20.
Найти: $\angle B$, $\angle A$.
(*Ответ*: $\angle B = 50°$, $\angle A = 40°$.)
3) Рис. 4.21.
Найти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.
(*Ответ*: $\angle A = 55°$, $\angle C = 55°$, $\angle B = 70°$.)
4) Рис. 4.22.
Найти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.
(*Ответ*: $\angle A = 50°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 70°$.)
5) Рис. 4.23.
Найти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.
(*Ответ*: $\angle A = 40°$, $\angle C = 95°$, $\angle B = 45°$.)
6) Рис. 4.24.
Найти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.
(*Ответ*: $\angle A = 70°$, $\angle B = 40°$, $\angle C = 70°$.)
7) Рис. 4.25.
Дано: $AB \parallel CD$.
Найти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.
(*Ответ*: $\angle A = 50°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 70°$.)
8) Рис. 4.26.
Найти: $\angle ABC$, $\angle C$.
(*Ответ*: $\angle ABC = 90°$, $\angle C = 60°$.)

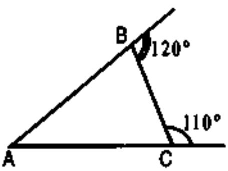


Рис. 4.22

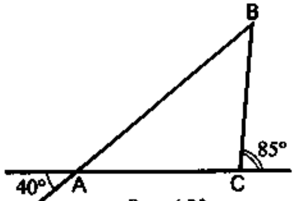


Рис. 4.23

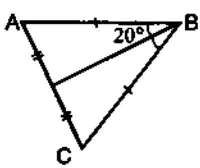


Рис. 4.24

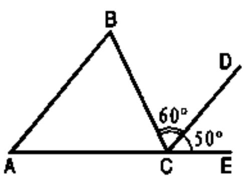


Рис. 4.25

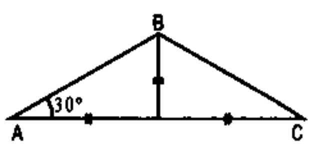


Рис. 4.26

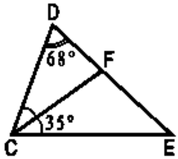


Рис. 4.27

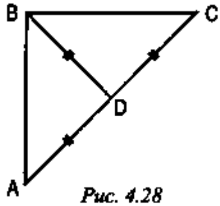


Рис. 4.28

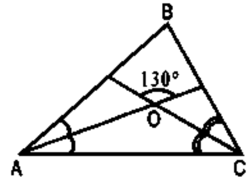


Рис. 4.29

9) Рис. 4.27.
Найти: $\angle E$, $\angle CFE$.
(*Ответ*: $\angle E = 42°$, $\angle CFE = 103°$.)

II уровень

1) Рис. 4.28.
Найти: $\angle ABC$.
(*Ответ*: $\angle ABC = 90°$.)

2) Рис. 4.29.
Найти: $\angle ABC$.
(*Ответ*: $\angle ABC = 80°$.)

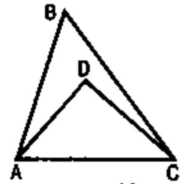


Рис. 4.30

3) Рис. 4.30.
Доказать: $\angle ABC < \angle ADC$.
Доказательство: $\angle ABC = 180° - (\angle BAC + \angle BCA)$.
$\angle ADC = 180° - (\angle DAC + \angle DCA)$, $\angle BAC > \angle DAC$, $\angle BCA > \angle DCA$, отсюда $\angle BAC + \angle BCA > \angle DAC + \angle DCA$, а $180° - (\angle BAC + \angle BCA) < 180° - (\angle DAC + \angle DCA)$.
Значит, $\angle ABC < \angle ADC$.

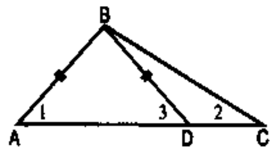


Рис. 4.31

4) Рис. 4.31.
Доказать: $\angle 1 > \angle 2$.
Доказательство: $\angle 1 = \angle 3$, так как ΔABC – равнобедренный, тогда $\angle BDC = 180° - \angle 3 = 180° - \angle 1$.
В ΔBDC $\angle 2 + \angle CBD + \angle BDC = 180°$, тогда $\angle 2 = 180° - (\angle BDC + \angle CBD) = 180° - (180° - \angle 1 + \angle CBD) = \angle 1 - \angle CBD$.
Получили $\angle 2 = \angle 1 - \angle CBD$, то есть $\angle 1 > \angle 2$.

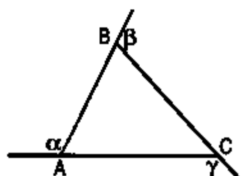


Рис. 4.32

5) Рис. 4.32.
Найти: $\alpha + \beta + \gamma$.
(*Ответ*: $\alpha + \beta + \gamma = 360°$.)

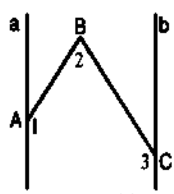


Рис. 4.33

6) Рис. 4.33.
Дано: $a \parallel b$.
Доказать: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 360°$. (*Ответ*: Через точку *B* провести прямую, параллельную прямой а, получится две пары односторонних углов при параллельных прямых, сумма их равна $180° \cdot 2 = 360°$.)

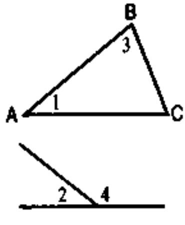


Рис. 4.34

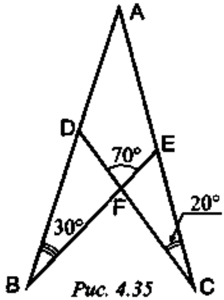


Рис. 4.35

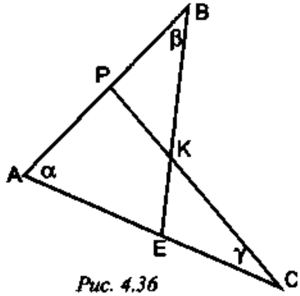


Рис. 4.36

7) Рис. 4.34.
Найти ошибку: $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$.
(***Ответ***: $\angle 2 + \angle 4 = 180°$, $\angle 1 + \angle 3 < 180°$.)
8) Рис. 4.35.
Найти: $\angle A$.
(***Ответ***: $\angle A = 20°$.)
9) Рис. 4.36.
Найти: $\angle EKC$.
(***Ответ***: $180° - (\alpha + \beta + \gamma)$.)

Домашнее задание

1. § 31, вопросы 3–5.
2. Решить задачи: I уровень – №120, 121, 123 из рабочей тетради; II уровень – №233, 234, 235 из учебника.

Задача № 234

Решение (см. рис. 4.37):
Возможны два случая:
а) $\angle DBC = 115°$, тогда $\angle ABC = 65°$, а $\angle A + \angle C = 115°$.
Так как $\angle A = \angle C$, то $\angle A = 57°30'$, $\angle C = 57°30'$.
б) $\angle BCD = 115°$, тогда $\angle BAC = \angle BCA = 65°$, а $\angle ABC = 50°$.
(***Ответ***: $57°30'$, $57°30'$, $65°$ или $65°$, $65°$, $50°$.)

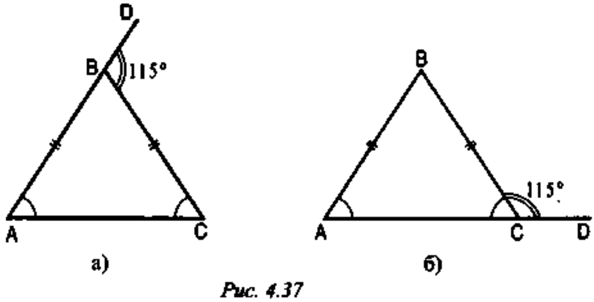


Рис. 4.37

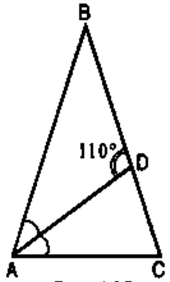


Рис. 4.38

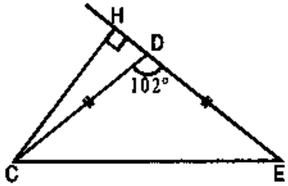


Рис. 4.39

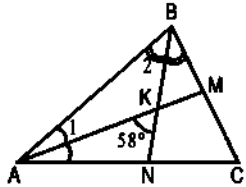


Рис. 4.40

Задача № 235

Решение (см. рис. 4.38): Если $\angle ADB = 110°$, то $\angle DAC + \angle ACD = 110°$, так как $\angle ADB$ – внешний угол $\Delta\, ADC$.

Так как $\Delta\, ABC$ – равнобедренный с основанием *AC*, *AD* – его биссектриса, то $\angle DAC = 1/2\ \angle ACD$, тогда $1/2\ \angle ACD + \angle ACD = 110°$, откуда $\angle ACD = 73°20'$, тогда $\angle BAC = 73°20'$, $\angle ABC = 33°20'$. (***Ответ***: $73°20'$, $73°20'$, $33°20'$.)

3. ***Дополнительные задачи:***

Задача 1

В равнобедренном треугольнике *CDE* с основанием *CE* и углом *D*, равным 102°, проведена высота *CH*.

Найдите $\angle DCH$.

Решение (см. рис. 4.39): $\angle D = 102°$, тогда $\angle CDH = 78°$.

$\angle H = 90°$, тогда $\angle DCH = 180° - (\angle H + \angle CDH) = 12°$. (***Ответ***: $\angle DCH = 12°$.)

Задача 2

В треугольнике *ABC* проведены биссектрисы *AM* и *BN*, пересекающиеся в точке *K*, причем $\angle AKN = 58°$.

Найдите $\angle ACB$.

Решение (см. рис. 4.40): $\angle AKN = 58°$, тогда $\angle AKB = 122°$, следовательно, $\angle 1 + \angle 2 = 180° - \angle AKB = 58°$.

$\angle ABC = 2\angle 2$, $\angle BAC = 2\angle 1$.

Тогда $\angle ABC + \angle BAC = 2(\angle 2 + \angle 1) = 2 \cdot 58° = 116°$.

Следовательно, $\angle ACB = 180° - (\angle ABC + \angle BAC) = 64°$. (***Ответ***: $\angle ACB = 64°$.)

Урок 45. Соотношения между сторонами и углами треугольника

Цели урока:

1) рассмотреть теоремы о соотношениях между сторонами и углами треугольника и их применение при решении задач;
2) совершенствовать навыки решения задач на применение теоремы о сумме углов треугольника.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Проверка домашнего задания

Проверить домашние задачи № 234, 235, дополнительные домашние задачи. (Попросить подготовить 4 учащихся краткие решения задач на доске до начала урока.)

III. Самостоятельная работа

Можно предложить учащимся записать краткое решение задач на двух листах через копировальную бумагу.

I уровень

Вариант I

1. Рис. 4.41.

Найти: углы $\Delta\, ABC$.

2. Внутренние углы треугольника *ABC* пропорциональны числам 2, 5, 8.

а) *Найдите* углы $\Delta\, ABC$.

б) *Найдите* внешние углы $\Delta\, ABC$.

3. В треугольнике *ABC* проведена биссектриса *BD*. $\angle A = 50°$, $\angle B = 60°$. *Найдите* углы треугольника *CBD*.

Вариант II

1. Рис. 4.42.

Найти: углы $\Delta\, ABC$.

2. Внутренние углы треугольника *ABC* пропорциональны числам 3, 5, 7.

а) *Найти:* углы $\Delta\, ABC$.

б) *Найти:* внешние углы $\Delta\, ABC$.

3. В треугольнике *ABC* проведена биссектриса *BD*.

$\angle ADB = 120°$, $\angle B = 80°$.

Найти: углы треугольника *CBD*.

II уровень

Вариант I

1. Рис. 4.43.

Дано: *AB* = *BC*. *Найти* углы $\Delta\, ABC$.

2. Внешний угол треугольника равен 140°, а внутренние углы, не смежные с ним, относятся как 3 : 4. *Найдите* все внутренние углы треугольника.

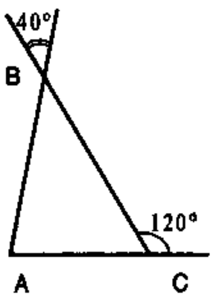


Рис. 4.41

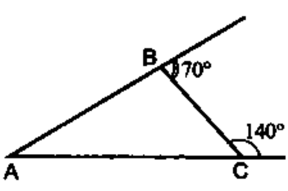


Рис. 4.42

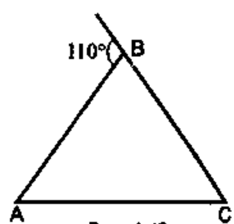


Рис. 4.43

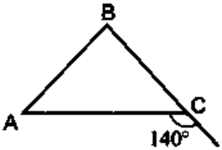


Рис. 4.44

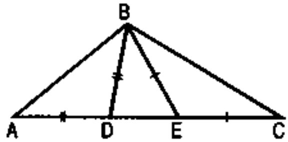


Рис. 4.45

3. ΔABC – равнобедренный с основанием AB. Биссектрисы углов при основании пересекаются в точке D. $\angle ADB = 100°$.

Найдите угол C.

Вариант II

1. Рис. 4.44.

Дано: $AB = BC$.

Найти углы ΔABC.

2. Один из внутренних углов треугольника в 3 раза больше другого, а внешний угол, смежный с третьим внутренним углом, равен 100°.

Найдите все внутренние углы треугольника.

3. ΔABC – равнобедренный с основанием AB. Биссектрисы углов при основании пересекаются в точке D. $\angle C = 100°$.

Найдите $\angle ADB$.

III уровень

Вариант I

1. Рис. 4.45.

Дано: $AD = BD$; $BE = EC$; $\angle BDE = 80°$, $\angle BED = 60°$.

Найти: $\angle ABC$.

2. Какими могут быть углы равнобедренного треугольника, если один из них на 40° меньше суммы двух других?

3. Один из углов треугольника равен сумме двух других.

Докажите, что данный треугольник – прямоугольный.

Вариант II

1. Рис. 4.45.

Дано: $AD = BD$; $BE = EC$; $\angle A = 40°$, $\angle C = 30°$.

Найти: $\angle DBE$.

2. Какими могут быть углы равнобедренного треугольника, если один из них в 5 раз меньше суммы двух других?

3. Один из углов треугольника равен разности двух других.

Докажите, что данный треугольник – прямоугольный.

IV. Самопроверка задач самостоятельной работы по готовым ответам

Учащиеся проверяют на одном листочке свои ответы, а второй лист сдают на проверку учителю. Если ответ неверный, то ученик должен записать правильный ответ и дома решить задачу повторно.

Ответы к задачам самостоятельной работы:

I уровень

Вариант I

1. $\angle A = 80°$, $\angle B = 40°$, $\angle C = 60°$.

2. а) 24°, 60°, 96°; б) 156°, 120°, 84°.
3. $\angle CBD = 30°$, $\angle BDC = 80°$, $\angle BCD = 70°$.

Вариант II

1. $\angle A = 30°$, $\angle B = 110°$, $\angle C = 40°$.
2. а) 36°, 60°, 84°; б) 144°, 120°, 96°.
3. $\angle CBD = 40°$, $\angle BDC = 60°$, $\angle BCD = 80°$.

II уровень

Вариант I

1. $\angle A = 55°$, $\angle C = 55°$, $\angle B = 70°$.
2. 60°, 80°, 40°.
3. $\angle C = 20°$.

Вариант II

1. $\angle A = 40°$, $\angle C = 40°$, $\angle B = 100°$.
2. 25°, 75°, 80°.
3. $\angle ADB = 140°$.

III уровень

Вариант I

1. $\angle ABC = 110°$.
2. 55°, 55°, 70° или 70°, 70°, 40°.
3. $\angle A + \angle B = \angle C$, $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.
$2\angle C = 180°$, $\angle C = 90°$.

Вариант II

1. $\angle DBE = 40°$.
2. 75°, 75°, 30° или 30°, 30°, 120°.
3. $\angle C = \angle A - \angle B$, $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.
$\angle A + \angle B + (\angle A - \angle B) = 180°$, $\angle A = 90°$.

V. Изучение нового материала

1. Решить задачу (см. рис. 4.46):
Дано: ΔMOC, $K \in CM$, $MO = MK$.
Доказать:
а) $\angle 1 > \angle 3$; б) $\angle MOC > \angle 3$.
Доказательство:

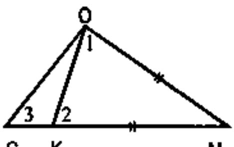


Рис. 4.46

а) Так как $MO = MK$, то ΔMOK – равнобедренный с основанием OK, значит, $\angle 1 = \angle 2$.

Так как $\angle 2$ – внешний угол ΔCOK, то $\angle 2 = \angle 3 + \angle COK$, следовательно, $\angle 2$ больше $\angle 3$. Так как $\angle 1 = \angle 2$, а $\angle 2$ больше $\angle 3$, то и $\angle 1$ больше $\angle 3$, что и требовалось доказать.

б) $\angle MOC = \angle COK + \angle 1$, следовательно, $\angle MOC$ больше $\angle 1$, но $\angle 1$ больше $\angle 3$, поэтому $\angle MOC$ больше $\angle 3$, ч.т.д.

2. Доказательство теоремы о соотношениях между сторонами и углами треугольника (пункт 32 учебника).

VI. Закрепление изученного материала

1. Решить устно задачи №130, 131 из рабочей тетради.
2. Решить задачи устно:

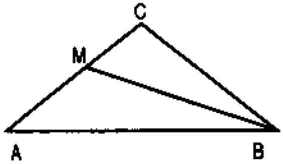


Рис. 4.47

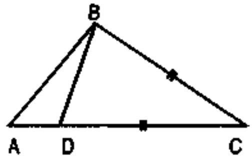


Рис. 4.48

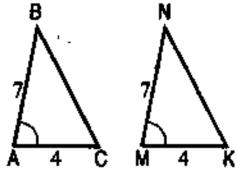


Рис. 4.49

1) Рис. 4.47.
Дано: $\angle C$ – тупой.
Доказать: $MB < AB$.
2) Рис. 4.48.
Дано: $BC = DC$.
Доказать: $\angle B > \angle A$.
3) Рис. 4.49.
Сравнить $\angle C$ и $\angle N$.
4. *Дано*: ΔABC, ΔMPK, $AC = MK$,
$\angle A = \angle M = 60°$, $\angle C = \angle K = 50°$.
Сравнить отрезки AB и PK.

Домашнее задание

1. § 32, вопрос 6.
2. Решить задачи № 236, 237.
3. Выполнить работу над ошибками.

Урок 46. Соотношения между сторонами и углами треугольника

Цели урока:

1) рассмотреть следствия теоремы о соотношениях между сторонами и углами треугольника;
2) научить учащихся решать задачи на применение теорем о соотношениях между сторонами и углами треугольника.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока и сформулировать цели.

II. Актуализация знаний учащихся

1. Теоретический опрос.

Двое учащихся готовят у доски доказательства I и II частей теоремы о соотношениях между сторонами и углами треугольника с последующим заслушиванием их ответов всем классом.

2. Решение задач (устно).

1) Рис. 4.50.
Дано: $\angle A = \angle B$.

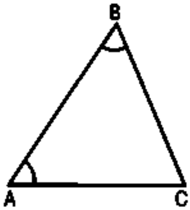


Рис. 4.50

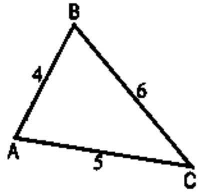


Рис. 4.51

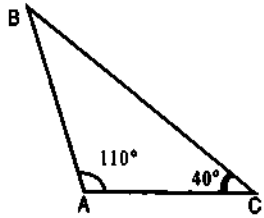


Рис. 4.52

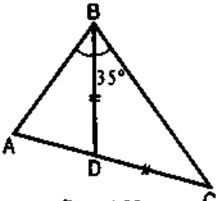


Рис. 4.53

Доказать: Δ *ABC* – равнобедренный.

2) Рис. 4.51.

Сравните углы Δ *ABC*.

3) Рис. 4.52.

Укажите наибольшую и наименьшую стороны Δ *ABC*.

4) Рис. 4.53.

Сравните отрезки *AD* и *DC*.

3. Индивидуальная работа в рабочих тетрадях: решить задачи №132, 133.

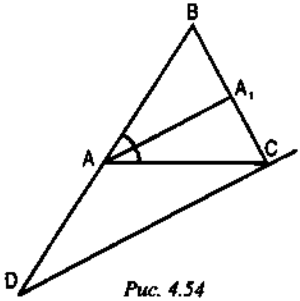


Рис. 4.54

III. Изучение нового материала

Задача 1

Доказать, что в прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета.

Задача 2

Доказать, что если два угла треугольника равны, то треугольник равнобедренный.

Для решения данных задач можно дать 2–3 минуты на обдумывание, а затем заслушать все варианты доказательств. В конце следует подчеркнуть, что доказанные утверждения являются следствиями теоремы о соотношениях между сторонами и углами треугольника, а второе следствие называется признаком равнобедренного треугольника.

IV. Закрепление изученного материала

1. Решить задачу № 243 (один ученик работает у доски, остальные – в тетрадях).

Задача № 243

Дано: ΔABC, AA_1 – биссектриса, $CD \parallel AA_1$, $D \in AB$.

Доказать: $AC = AD$.

Доказательство (см. рис. 4.54): $\angle BAA_1 = \angle CAA_1$, так как AA_1 – биссектриса.

$AA_1 \parallel DC$, значит, $\angle CAA_1 = \angle ACD$. $\angle BAC$ – внешний угол треугольника ACD, $\angle BAC = 2\angle CAA_1 = \angle ACD + \angle ADC$.

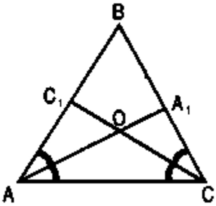


Рис. 4.55

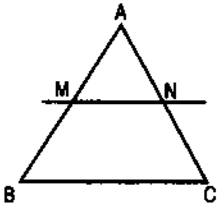


Рис. 4.56

Так как $\angle ACD = \angle CAA_1$, то и $\angle ADC = \angle CAA_1$, т.е. в ΔACD углы ACD и ADC равны, а по признаку равнобедренного треугольника ΔACD – равнобедренный с основанием DC, откуда следует, что $AD = AC$.

Наводящие вопросы:

1) Сравните $\angle BAC$ и $\angle ACD$.

2) Каким является $\angle BAC$ по отношению к ΔDAC? Чему равна его величина?

3) Сравните $\angle ACD$ и $\angle ADC$.

О чем это говорит?

2. Решить задачу №134 из рабочей тетради.

3. Самостоятельно решить задачи № 240, 241, 246, 247.

Задача № 240

Решение (см. рис. 4.55): ΔABC – равнобедренный, значит $\angle BAC = \angle BCA$.

AA_1, CC_1 – биссектрисы двух равных углов, следовательно, $\angle A_1AC = \angle C_1CA$.

В ΔAOC $\angle OAC = \angle OCA$, значит, ΔAOC – равнобедренный.

Задача № 241

Решение (см. рис. 4.56): ΔABC – равнобедренный, значит $\angle B = \angle C$. $MN \parallel BC$, откуда $\angle AMN = \angle B$, $\angle ANM = \angle C$.

Получили, что $\angle AMN = \angle ANM$, т.е. в ΔAMN два угла равны, следовательно, ΔAMN – равнобедренный.

Задача № 246

Решение: Так как BO – биссектриса, то $\angle ABO = \angle EBO$.

$OE \parallel AB$, следовательно, $\angle ABO = \angle BOE$, отсюда $\angle BOE = \angle EBO$, а ΔBOE – равнобедренный с основанием BO, т.е. $BE = OE$. Так как CO – биссектриса, то $\angle ACO = \angle DCO$.

$OD \parallel AC$, следовательно, $\angle ACO = \angle COD$, отсюда $\angle DCO = \angle COD$, а ΔDCO – равнобедренный с основанием OC, т.е. $OD = DC$.

$P_{EDO} = OE + ED + DO$, но $OE = BE$, $OD = DC$, тогда $P_{EDO} = BE + ED + DC = BC$.

Задача № 247

Решение:

а) $\Delta ABQ = \Delta ACP$ по двум сторонам и углу между ними ($AB = AC$, $AQ = AP$, $\angle A$ – общий), следовательно, $\angle ABQ = \angle ACP$.

ΔABC – равнобедренный ($AB = AC$), тогда $\angle ABC = \angle ACB$.

Так как $\angle ABC = \angle ACB$ и $\angle ABQ = \angle ACP$, то $\angle OBC = \angle OCB$, т.е. в ΔBOC два угла равны, а это значит, что ΔBOC – равнобедренный.

б) Так как ΔBOC – равнобедренный, то $BO = CO$, тогда $\Delta ABO = \Delta ACO$ по трем сторонам ($AB = AC$, AO – общая сторона, $BO = CO$), следовательно, $\angle BAO = \angle CAO$, т.е. AO – биссектриса $\angle BAC$, а биссектриса, проведенная из вершины равнобедренного треугольника к его основанию, является его медианой и высотой. Таким образом, прямая OA проходит через середину основания BC и перпендикулярна к нему.

Домашнее задание

1. § 32, вопросы 6–8.
2. Решить задачи № 242, 244, 245.
3. *Дополнительная задача:*

В ΔABC проведена биссектриса BD, $\angle A = 75°$, $\angle C = 35°$.

а) Докажите, что ΔBDC равнобедренный.

б) Сравните отрезки AD и DC.

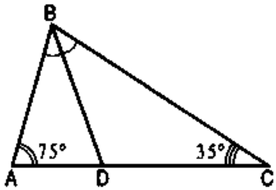


Рис. 4.57

Решение (см. рис. 4.57):

а) В ΔABC $\angle A = 75°$, $\angle C = 35°$, тогда $\angle ABC = 180° - (\angle A + \angle C) = 70°$.

Так как BD – биссектриса $\angle ABC$, равного $70°$, то $\angle DBC = 35°$.

В ΔBDC два угла ($\angle DCB$ и $\angle DBC$) равны, значит, ΔBDC – равнобедренный и $BD = DC$.

б) В ΔABD $\angle A = 75°$, $\angle ABD = 35°$, $\angle ADB = 70°$, тогда по теореме о соотношениях между сторонами и углами треугольника $BD > AD$.

Так как $DC = BD$, а $AD < BD$, то $AD < DC$. (*Ответ*: $AD < DC$.)

Урок 47. Неравенство треугольника

Цели урока:

1) рассмотреть теорему о неравенстве треугольника и показать его применение при решении задач;
2) совершенствовать навыки учащихся при решении задач на применение теоремы о соотношениях между сторонами и углами треугольника.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока и сформулировать цели урока.

II. Повторение. Проверка домашнего задания

1. Теоретический опрос по вопросам 6–8 можно провести письменно для 4 учащихся.

2. Проверить дополнительную домашнюю задачу, после чего можно менее подготовленным учащимся дать аналогичную задачу (№ 1), а остальным учащимся задачи № 2, 3 для самостоятельного решения.

(Учитель контролирует работу учащихся, за правильно решенные задачи можно поставить оценки.)

Задача 1

В треугольнике CDE проведена биссектриса EF, $\angle C = 90°$, $\angle D = 30°$.

а) Докажите, что $\Delta\, DEF$ равнобедренный.

б) Сравните отрезки CF и DF.

Задача 2

В треугольнике ABC $\angle C = 90°$. Точка M лежит на стороне AC.

Докажите, что $BC < BM < AB$.

Задача 3

В $\Delta\, ABC$ $AB = BC$. На продолжении сторон AC и BC за вершину C отмечены точки D и E соответственно. Известно, что $DE \parallel AB$.

Докажите, что $\Delta\, CDE$ равнобедренный.

III. Изучение нового материала

Решить задачу с последующим обсуждением:

Построить треугольник ABC такой, чтобы:

а) $AB = 4$ см, $BC = 5$ см, $AC = 6$ см;

б) $AB = 5$ см, $BC = 3$ см, $AC = 2$ см;

в) $AB = 8$ см, $BC = 4$ см, $AC = 3$ см.

Задачу под буквой *а* можно предложить менее подготовленным учащимся, остальных учащихся разделить на два варианта, первый из них решает задачу под буквой *б*, а второй — под буквой *в*. На решение задачи дается 2–3 минуты, а затем учитель вызывает ученика, решавшего задачу а, и весь класс слушает решение этой задачи. Таким же образом проверяются задачи *б* и *в*.

В ходе решения данной задачи и последующего ее обсуждения учащиеся должны прийти к тому, что не всегда можно построить треугольник из трех отрезков.

– Итак, возникла проблемная ситуация. Даны три отрезка, длины которых известны. Как определить, не выполняя построения, существует ли такой треугольник? (*Для того, чтобы определить, существует ли треугольник с данными сторонами, нужно каждую сторону сравнить с суммой двух других сторон треугольника. Если каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон, то такой треугольник существует.*)

– Действительно, каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон. Это утверждение получило название ***теоремы о неравенстве треугольника***, которую нам с вами необходимо доказать.

На доске и в тетрадях учащихся.

Дано: $\Delta\, ABC$.

Доказать: $AB < AC + CB$.

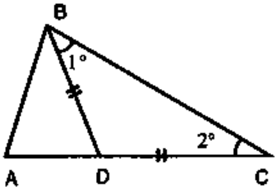


Рис. к задаче

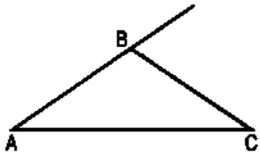


Рис. 4.58

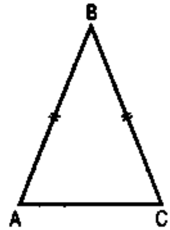


Рис. 4.59

Доказательство:

1) $A - C - D$, $CD = BC$;

2) ΔBCD – равнобедренный => $\angle 1 = \angle 2$;

3) $\angle ABD > \angle 1$ => $\angle ABD > \angle 2$ => $AD > AB$;

4) $AD = AC + CD = AC + BC$ => $AB < AC + BC$.

В ходе доказательства теоремы учащимся можно задавать следующие вопросы:

1) Что вы можете сказать о треугольнике BCD?

2) Сравните $\angle ABD$ и $\angle 2$.

3) Какая из сторон (AD или AB) треугольника ABD больше? Почему?

4) Сравните AD и $AC + BC$, AB и $AC + BC$.

IV. Закрепление изученного материала

1. Решить устно задачи №137, 135 из рабочей тетради.

2. Решить письменно задачи № 253, 250 (б) (один ученик работает у доски, остальные – в тетрадях).

Задача № 253

Решение (см. рис. 4.58): Один из внешних углов треугольника острый, тогда внутренний угол, смежный с указанным – тупой. В равнобедренном ΔABC тупым может быть только угол при вершине.

Пусть в треугольнике ABC $AB = BC$, $\angle B > 90°$, тогда $AB < AC$, $BC < AC$ по теореме о соотношениях между сторонами и углами треугольника. Так как разность двух сторон равна 4 см, то AC на 4 см больше, чем AB и BC.

Тогда $AC = AB + 4$, $BC = AB$.

$P_{ABC} = 25$ см, тогда $P_{ABC} = AB + BC + AC = AB + AB + AB + 4 = 25$, откуда $AB = 7$ см, значит, $BC = 7$ см, $AC = 11$ см. (*Ответ*: 7 см, 7 см, 11 см.)

Наводящие вопросы:

1) Что вы можете сказать об углах этого треугольника, если известно, что один из них острый?

2) Предположим, что тупым является угол B. Сравните стороны треугольника ABC.

3) Чему равны стороны данного треугольника, если его периметр равен 25 см?

Задача № 250 (б)

Решение (см. рис. 4.59): Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон. ΔABC – равнобедренный ($AB = BC$), поэтому достаточно проверить 2 условия: $AB < AC + BC$, $AC < AB = BC$.

Возможны два случая:

1) $AB = BC = 2$ см, $AC = 8$ см. Условие $AC < AB + BC$ не выполняется, следовательно, такого быть не может.

2) $AB = BC = 8$ см, $AC = 2$ см. Оба условия выполняются, такой треугольник существует.

(*Ответ*: 8 см, 8 см, 2 см.)

Наводящие вопросы:

1) Известна ли по условию задачи длина основания равнобедренного треугольника? А длина боковой стороны? Какие значения может принимать длина основания?

2) Существует ли равнобедренный треугольник с боковой стороной 2 см, с основанием 8 см? Объяснить.

3) Существует ли равнобедренный треугольник с боковой стороной 8 см, с основанием 2 см? Доказать.

3. Самостоятельно решить задачи № 249, 252, 238.

Задача № 249

Решение: Пусть основание равно 10 см, боковые стороны по 25 см. По теореме о неравенстве треугольника должны выполняться условия $10 < 25 + 25$; $25 < 10 + 25$. Такой треугольник существует, значит, основание равно 10 см.

Пусть основаиие равно 25 см, боковые стороны по 10 см.

Условие $25 < 10 + 10$ не выполняется, такой треугольник не существует. (*Ответ*: основание равно 10 см.)

Задача № 252

Решение: Два внешних угла треугольника при разных вершинах равны, значит, равны и смежные с ними внутреиние углы данного треугольника, следовательно, указанный треугольник равнобедренный. Пусть основание равно 16 см.

Тогда боковые стороны равны $(74 - 16) : 2 = 29$ см.

В треугольнике со сторонами 16 см, 29 см, 29 см каждая сторона меньше суммы двух других его сторон. Если боковые стороны равны 16 см, то основание равно $74 - 16 \cdot 2 = 42$ см, получаем $42 < 16 + 16$ – неверно, следовательно, боковые стороны не могут быть равными 16 см. (*Ответ*: 29 см, 29 см.)

Задача № 238

Решение (см. рис. 4.60): Возьмем произвольную точку X на основании AC равнобедренного ΔABC и докажем, что $BX < BC$. BX – сторона, противолежащая $\angle C$. BC – сторона, противолежащая $\angle BXC$.

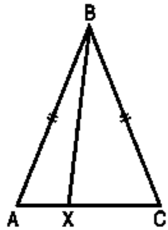


Рис. 4.60

Сравним $\angle C$ и $\angle BXC$.

Из ΔABC $\angle C = 180° - (\angle A + \angle ABC)$;

из ΔBCX $\angle BXC = 180° - (\angle C + \angle CBX)$.

$\angle A + \angle ABC > \angle C + \angle CBX$, так как $\angle A = \angle C$, $\angle ABC > \angle CBX$, следовательно, $180° - (\angle A + \angle ABC) < 180° - (\angle C + \angle CBX)$, то есть $\angle C < \angle BXC$, а против меньшего угла лежит меньшая сторона, то есть $BX < BC$.

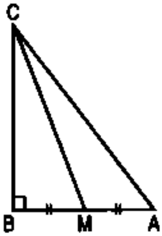


Рис. 4.61

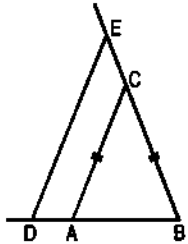


Рис. 4.62

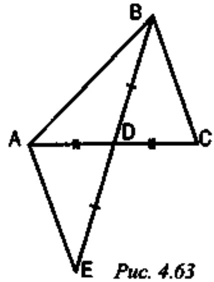


Рис. 4.63

Дополнительные задачи

I уровень

1. В треугольнике ABC $\angle B = 90^\circ$, CM – медиана треугольника.

Докажите, что $\angle CMB > \angle CAB > \angle ACM$.

Решение (см. рис. 4.61):

1) Из $\Delta\ CMB$ $\angle CMB = 180^\circ - (90^\circ + \angle BCM) = 90^\circ - \angle BCM$.

Из $\Delta\ ABC$ $\angle CAB = 180^\circ - (90^\circ + \angle ACB) = 90^\circ - \angle ACB$.

Так как $\angle BCM < \angle ACB$, то $90^\circ - \angle BCM > 90^\circ - \angle ACB$, т.е. $\angle CMB > \angle CAB$.

2) $\Delta\ CBM$ – прямоугольный, гипотенуза $CM >$ катета BM, а так как $BM = MA$, то $CM > MA$. В $\Delta\ CMA$ $CM > MA$, но против большей стороны лежит больший угол, т.е. $\angle CAM > \angle ACM$, следовательно, $\angle CAB > \angle ACM$.

3) Так как $\angle CMB > \angle CAB$, а $\angle CAB > \angle ACM$, то $\angle CMB > \angle CAB > \angle ACM$.

2. В треугольнике ABC $AC = BC$. Отрезки BC и BA продолжены за вершины C и A. На продолжениях отмечены точки E и D соответственно. Известно, что $DE \parallel AC$.

Докажите, что треугольник BDE равнобедренный.

Доказательство (см. рис. 4.62): $\Delta\ ABC$ – равнобедрениый, значит, $\angle B = \angle CAB$. $DE \parallel AC$, значит, $\angle EDA = \angle CAB$, отсюда получаем, что $\angle B = \angle EDA$ и по признаку равнобедренного треугольника $\Delta\ BDE$ – равнобедренный.

II уровень

1. В треугольнике ABC BD – медиана, $\angle ABD < \angle BAC + \angle BCA$.

Докажите, что $BD > 1/2\ BC$.

Доказательство (см. рис. 4.63): Продолжим медиану BD за точку D на отрезок DE, равный BD. Тогда $\Delta\ ADE = \Delta\ CDB$ по двум сторонам и углу между ними, значит, $BC = AE$, $\angle CAE = \angle BCA$.

Тогда получаем, $\angle BAC + \angle BCA = \angle BAD + \angle CAE = \angle BAE$. Так как $\angle ABD < \angle BAC + \angle BCA$, то $\angle ABE < \angle BAE$, тогда в $\Delta\ ABE$ $AE < BE$, т.е. $AE < 2BD$ или $BD > 1/2\ AE$.

Так как $AE = BC$, то $BD > 1/2\ AE$.

2. Дан треугольник ABC. Прямая CD параллельна биссектрисе внешнего угла треугольника при вершине B и пересекает сторону AB в точке D. Из точки D к прямой BC проведен перпендикуляр DK.

Сравните отрезки DK и BC.

Решение (см. рис. 4.64): BE – биссектриса, тогда $\angle 1 = \angle 2$.

$BE \parallel DC$, тогда $\angle 2 = \angle BCD$, а $\angle 1 = \angle BDC$, а так как $\angle 1 = \angle 2$, то $\angle BCD = \angle BDC$, т.е. ΔDBC – равнобедренный с основанием DC и $DB = CB$.

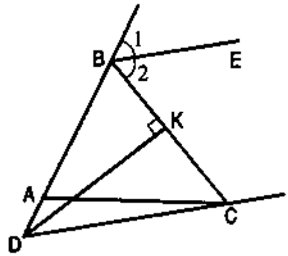


Рис. 4.64

ΔDBK – прямоугольный ($\angle K = 90°$), значит гипотенуза DB больше катета DK, а так как $DB = BC$, то $BC > DK$. (*Ответ*: $BC > DK$.)

Домашнее задание

1. § 33, вопрос 9.
2. Решить задачи № 250 (а, в), 251, 239.
3. *Дополнительные задачи:*

Задача 1

В треугольнике ABC BD – медиана, $AB > 2BD$.

Докажите, что $\angle BAC + \angle BCD < \angle DBC$.

Задача 2

В треугольнике ABC через вершину C проведена прямая, параллельная биссектрисе BD и пересекающая прямую AB в точке K. BE – высота треугольника ABC. Сравните отрезки BE и BK.

Урок 48. Решение задач. Подготовка к контрольной работе

Цели урока:

1) совершенствовать навыки решения задач;
2) подготовить учащихся к предстоящей контрольной работе.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока и сформулировать его цели.

II. Актуализация знаний учащихся

1. Урок можно начать с решения задач по готовым чертежам. (Рисунки к задачам нужно заранее подготовить на доске или на планшетах.)

1) Рис. 4.65.

Может ли длина AB быть равной 27 см?

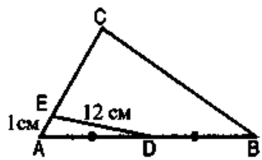


Рис. 4.65

2) Рис. 4.66.

Дано: $R_1 = 5$ см, $R_2 = 4$ см. Каким может быть расстояние от точки O_1 до точки O_2?

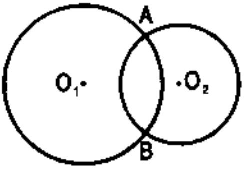


Рис. 4.66

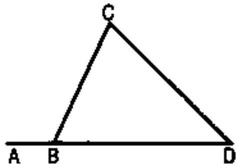


Рис. 4.67

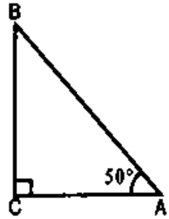


Рис. 4.68

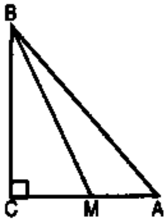


Рис. 4.69

3) Рис. 4.67.
Доказать: $\angle ABC > \angle C$.
4) Рис. 4.68.
Сравните AC и BC.
5) Рис. 4.69.
Доказать: $BC < BM < BA$.
6) Рис. 4.70.
Доказать: $BD + DC > AD$.

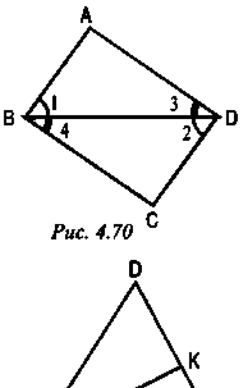


Рис. 4.70

2. Решить задачу (один ученик решает у доски, остальные – в тетрадях):

Рис. 4.71.

Дано: Отрезок EK – биссектриса треугольника DEC.

Доказать, что $KC < EC$.

Доказательство: $\angle EKC$ – внешний угол ΔDKE, значит он больше $\angle 1$, следовательно, $\angle EKC > \angle 2$ ($\angle 1 = \angle 2$, так как EK – биссектриса). Так как $\angle EKC > \angle 2$, то по теореме о соотношениях между сторонами и углами треугольника $EC > KC$, т.е. $KC < EC$, что и требовалось доказать.

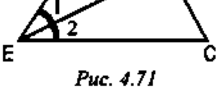


Рис. 4.71

Наводящие вопросы:

1) Сравните угол 1 и угол EKC, угол 2 и угол EKC. Почему?

2) Какая из сторон (EC или KC) треугольника EKC больше?

III. Самостоятельное решение задач

(С последующей самопроверкой по готовым ответам и указаниям. Учитель оказывает индивидуальную помощь наименее подготовленным учащимся и остальным по необходимости.)

I уровень

1. Рис. 4.72.
Дано: $\angle BAE = 112°$, $\angle DBF = 68°$, $BC = 9$ см.
Найти: AC.

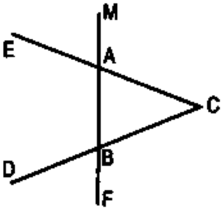


Рис. 4.72

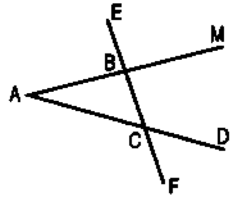


Рис. 4.73

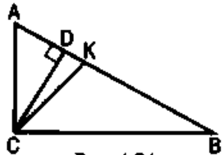


Рис. 4.74

2. Рис. 4.73.
Дано: $\angle CBM = \angle ACF$, $P_{ABC} = 34$ см, $BC = 12$ см.
Найти: AB.

3. Одна из сторон тупоугольного равнобедренного треугольника на 17 см меньше другой.

Найдите стороны этого треугольника, если его периметр равен 77 см.

4. В равнобедренном треугольнике биссектрисы углов при основании образуют при пересечении угол, равный 52°. Найдите угол при вершине этого треугольника.

5. В треугольнике ABC $\angle B = 70°$, $\angle C = 60°$. Сравните стороны треугольника.

6. Рис. 4.74.
Дано: $\angle C = 90°$, $\angle B = 27°$, CD – высота ΔABC, CK – биссектриса ΔABC.
Найти: $\angle DCK$.

II уровень

1. В треугольнике MKP медиана MC равна половине стороны KP. Найдите угол M треугольника MKP.

2. Сторона AB треугольника ABC продолжена за точку B. На продолжении отмечена точка D так, что $BC = BD$. Найдите угол ACD, если $\angle ACB = 60°$, $\angle ABC = 50°$.

3. В ΔABC биссектрисы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O, $\angle ABC = 30°$, $\angle AOB = 107°$. Докажите, что треугольник ABC не является остроугольным.

4. На сторонах угла A, равного 45°, отмечены точки B и C, а во внутренней области угла – точка D так, что $\angle ABD = 95°$, $\angle ACD = 90°$. Найдите $\angle BDC$.

5. В треугольнике ABC $\angle B = 60°$. Внутри треугольника отмечена точка O, равноудаленная от его вершин. Докажите, что треугольник AOC является тупоугольным.

6. В ΔABC BB_1 – медиана. Докажите, что $BB_1 < 1/2\,(AB + BC)$.

7. В треугольнике ABC $\angle A = 40°$, $\angle B = 70°$. Из вершины C вне треугольника проведен луч CD так, что $\angle BCD$ равен 109°59′. Может ли выполняться равенство $AD = AC + CD$?

Ответы и указания к задачам для самопроверки:

I уровень

1. $AC = 9$ см, так как ΔABC – равнобедренный ($\angle ABC = \angle BAC$).

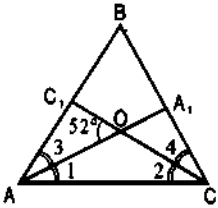


Рис. 4.75

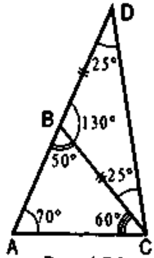


Рис. 4.76

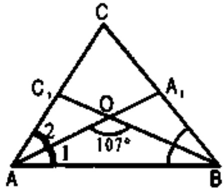


Рис. 4.77

2. $AB = 11$ см, так как ΔABC – равнобедренный с основанием BC ($\angle ABC = \angle ACB$).

3. 20 см, 20 см, 37 см.

4. ***Решение*** (см. рис. 4.75): $\angle AOC \neq 52°$, т.к. тогда $\angle 1 + \angle 2 = 128°$ и $\angle 3 + \angle 4 = 128°$, а $\angle BAC + \angle BCA = 256°$, чего быть не может, значит, $\angle AOC_1 = 52°$, тогда $\angle 1 + \angle 2 = 52°$, $\angle 3 + \angle 4 = 52°$, а $\angle BAC + \angle BCA = 104°$, значит $\angle ABC = 76°$. (*Ответ*: $\angle ABC = 76°$.)

5. $\angle B = 70°$, $\angle C = 60°$, тогда $\angle A = 50°$. Следовательно, по теореме о соотношениях между сторонами и углами треугольника $BC < AB < AC$. (*Ответ*: $BC < AB < AC$.)

6. $\angle ACK = 45°$, $\angle BAC = 63°$, тогда $\angle ACD = 27°$, $\angle DCK = \angle ACK - \angle ACD = 45° - 27° = 18°$. (*Ответ*: $\angle DCK = 18°$.)

II уровень

1. $\angle M = 90°$.

2. Рис. 4.76.

$\angle ACD = 85°$ (см. решение по рисунку).

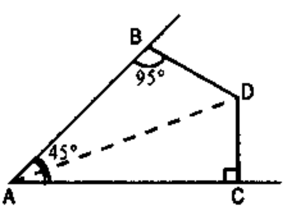


Рис. 4.78

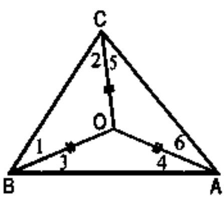


Рис. 4.79

3. Рис. 4.77.

$\angle 1 = 180° - (107° + 15°) = 58°$.

$\angle 2 = 58°$, $\angle CAB = 116°$, значит, ΔABC – тупоугольный.

4. Рис. 4.78.

$\angle BDC = \angle BDA + \angle CDA$.

$\angle BAD + \angle ABD + \angle BDA = 180°$, $\angle DAC + \angle ACD + \angle CDA = 180°$. Тогда $(\angle BAD + \angle ABD + + \angle BDA) + (\angle DAC + \angle ACD + \angle CDA) = 360°$.

$(\angle BAD + \angle DAC) + \angle ABD + \angle ACD + (\angle BDA + \angle CDA) = 45° + 95° + 90° + \angle BDC = 230° + \angle BDC = 360°$, откуда $\angle BDC = 130°$.

5. Рис. 4.79.

$CO = OB$, тогда $\angle 1 = \angle 2$. $OB = OA$, тогда $\angle 3 = \angle 4$. $\angle B = 60°$, т.е. $\angle 1 + \angle 3 = 60°$, тогда $\angle 2 + \angle 4 = 60°$.

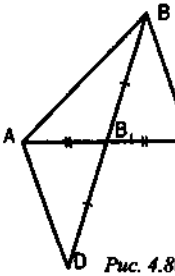


Рис. 4.80

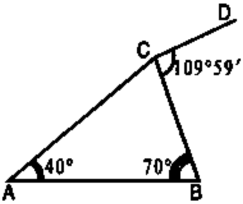


Рис. 4.81

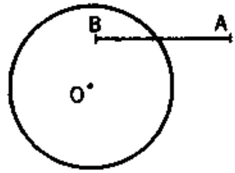


Рис. 4.82

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, тогда $\angle 5 + \angle 6 = 60°$, откуда $\angle AOC = 120°$, т.е. ΔAOC – тупоугольный.

6. Рис. 4.80.

Продолжим BB_1 за точку B_1 на отрезок $B_1D = BB_1$.

Тогда $\Delta ABB_1 = \Delta CDB_1$. $BD < BC + CD$, но $BD = 2BB_1$, а $CD = AB$, тогда $2BB_1 < BC + AB$, т.е. $BB_1 < 1/2\,(AB + BC)$.

7. Рис. 4.81.

Не может, так как если $AD = AC + CD$, то $C \in AD$, т.е. точки A, C, D лежат на одной прямой. В этом случае $\angle BCD = 110°$.

Домашнее задание

1. Решить задачи № 296, 297, 298.
2. *Дополнительные задачи:*

Задача 1

Радиус окружности, изображенной на рис. 4.82, равен 6 см. Отрезок AB пересекает окружность, $AO = 13$ см. Может ли отрезок AB равняться 4 см?

Задача 2

Треугольники ABD и BCD расположены по разные стороны от прямой BD, $\angle ADB = \angle BDC$, $\angle ABD = \angle DBC$.

Докажите, что $BD < AB + BC$.

Урок 49. Контрольная работа №4 по теме «Сумма углов треугольника. Соотношения между сторонами и углами треугольника» (см. Приложение 1)

Урок 50. Анализ контрольной работы

Цели урока:

1) устранение пробелов в знаниях учащихся;
2) совершенствование навыков решения задач

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока и сформулировать цели урока.

II. Общий анализ контрольной работы

1. Сообщить общие результаты контрольной работы.

2. Объяснить задания, с которыми не справилось большинство учащихся, или заслушать тех, кто успешно справился с этими заданиями;

3. Продемонстрировать лучшие работы.

III. Работа над ошибками

Учащиеся работают следующим образом:

1. Находят свои ошибки, используя готовые ответы и указания к задачам контрольной работы (можно их объединить в небольшие группы в зависимости от уровня и варианта контрольной работы, в этом случае им будет легче находить свои ошибки).

2. Решают по своему усмотрению или другой вариант контрольной работы, или переходят к решению задач следующего уровня. Если ученик успешно справился с задачами III уровня контрольной работы, он решает дополнительные задачи.

3. Задание на дом – продолжить решение задач контрольной работы или дополнительных задач (можно сделать оговорку, что каждый ученик должен решить не менее трех задач).

Ответы и указания к задачам контрольной работы

I уровень

Вариант I

1. $AB > BC > AC$, значит, $\angle C > \angle A > \angle B$.

Третий угол треугольника равен $180° - (120° + 40°) = 20°$, отсюда $\angle C = 120°$, $\angle A = 40°$, $\angle B = 20°$. (*Ответ*: $\angle C = 120°$, $\angle A = 40°$, $\angle B = 20°$.)

2. $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, тогда $\angle B + \angle C = 130°$.

$\angle B + 12 \cdot \angle B = 130°$, $\angle B = 10°$, $\angle C = 120°$. (*Ответ*: $\angle B = 10°$, $\angle C = 120°$.)

3. Рис. 4.85.

$\angle A = 55°$, тогда $\angle ACD = 35°$, $\angle CDA = 90°$. (*Ответ*: $\angle ACD = 35°$, $\angle A = 55°$, $\angle CDA = 90°$.)

4*. Рассмотрим два случая (см. рис. 4.86):

а) $x + 12 + x + 12 + x = 45$, $x = 7$. $AC = 7$, $AB = 19$, $BC = 19$.

$19 < 19 + 7$ (верно), $7 < 19 + 19$ (верно).

б) $x + x + x + 12 = 45$, $x = 11$. $AB = BC = 11$, $AC = 23$.

$23 < 11 + 11$ (неверно).

(*Ответ*: 19 см, 19 см, 7 см.)

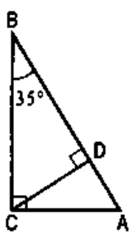


Рис. 4.85

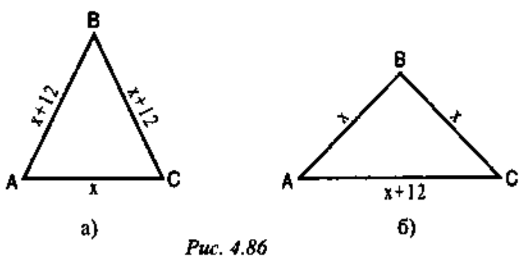


Рис. 4.86

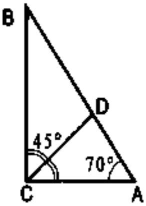
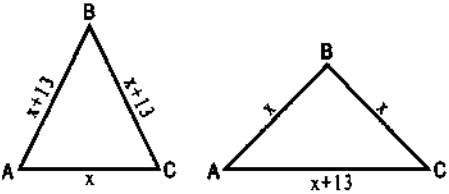


Рис. 4.87



а) б)

Рис. 4.88

Вариант II

1. $AB < BC < AC$, значит, $\angle C < \angle A < \angle B$.

Третий угол треугольника равен $180^\circ - (90^\circ + 30^\circ) = 60^\circ$, отсюда $\angle C = 30^\circ$, $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 90^\circ$. (*Ответ*: $\angle C = 30^\circ$, $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 90^\circ$.)

2. $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$, тогда $\angle B + \angle C = 90^\circ$.

$\angle C + (\angle C + 40^\circ) = 90^\circ$, $\angle C = 25^\circ$, $\angle B = 65^\circ$. (*Ответ*: $\angle C = 25^\circ$, $\angle B = 65^\circ$.)

3. Рис. 4.87.

$\angle B = 20^\circ$, $\angle BCD = 45^\circ$, $\angle BDC = 115^\circ$.

4*. Рассмотрим два случая (см. рис. 4.88):

а) $x + 13 + x + 13 + x = 50$, $x = 8$. $AC = 8$, $AB = BC = 21$.

$21 < 21 + 8$ (верно), $8 < 21 + 21$ (верно).

б) $x + x + x + 13 = 50$, $x = 12\frac{1}{3}$. $AB = BC = 12\frac{1}{3}$, $AC = 25\frac{1}{3}$.

$25\frac{1}{3} < 12\frac{1}{3} + 12\frac{1}{3}$ (неверно).

(*Ответ*: 21 см, 21 см, 8 см.)

II уровень

Вариант I

1. Рис. 4.89.

$\angle CMD$ – острый, тогда $\angle DME$ – тупой, значит, в ΔDME $DE > DM$.

2. Рис. 4.90.

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 90^\circ$, $\angle C = 60^\circ$.

3. Рис. 4.91.

$\angle CAO = 30^\circ$, тогда $\angle CAB = 60^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$.

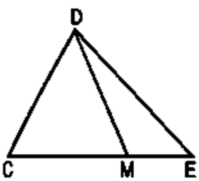


Рис. 4.89

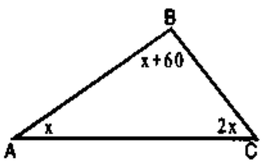


Рис. 4.90

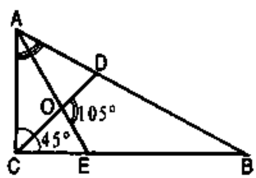


Рис. 4.91

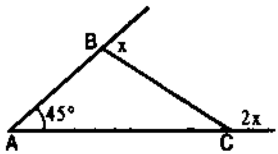


Рис. 4.92

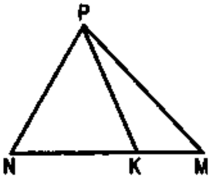


Рис. 4.93

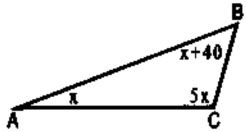


Рис. 4.94

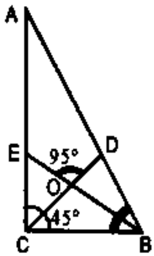


Рис. 4.95

4*. Рис. 4.92.

$\angle ABC = 180° - x$, $\angle ACB = 180° - 2x$.

$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180°$, $x = 75°$, тогда $2x - x = 75°$. (*Ответ*: 75°.)

Вариант II

1. Рис. 4.93.

$\angle NKP$ – острый, тогда $\angle PKM$ – тупой, значит, в $\Delta\ PKM$ $KP < MP$.

2. Рис. 4.94.

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, $\angle A = 20°$, $B = 60°$, $\angle C = 100°$.

3. Рис. 4.95.

$\angle CBO = 40°$, тогда $\angle ABC = 80°$, $\angle CAB = 10°$.

4*. Рис. 4.96.

$\angle ABC = 180° - x$, $\angle ACB = 180° - 2x$.

$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180°$, $x = 80°$, тогда $2x - x = 80°$. (*Ответ*: 80°.)

III уровень

Вариант I

1. Рис. 4.97.

$\Delta\ KPN$ – равнобедренный с основанием KN, тогда $KP = NP$.

В $\Delta\ MPN$ $NP > PM$, тогда $KP > PM$.

2. Рис. 4.98.

$\angle DAB = 180° - x$, $\angle ABE = 180° - 3x$.

$\angle DAB - \angle ABE = 40°$, тогда $x = 20°$.

$\angle BAC = 20°$, $\angle ABC = 60°$, $\angle C = 100°$.

3. Рис. 4.99.

$BDC = \angle DBC = 45°$, тогда $\angle ABD = 25°$, $\angle ADB = 135°$, $\angle A = 20°$.

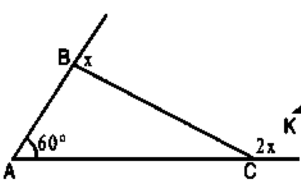


Рис. 4.96

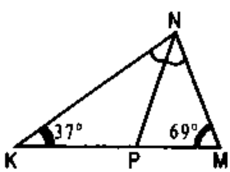


Рис. 4.97

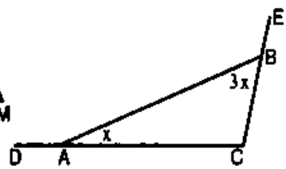


Рис. 4.98

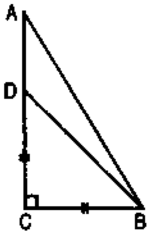


Рис. 4.99

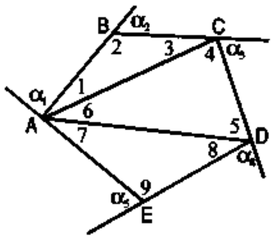


Рис. 4.100

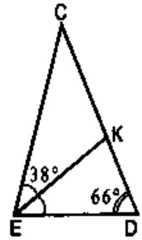


Рис. 4.101

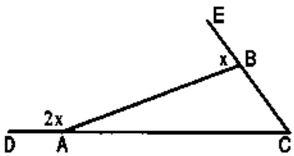


Рис. 4.102

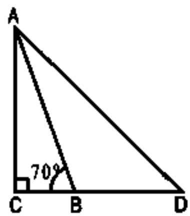


Рис. 4.103

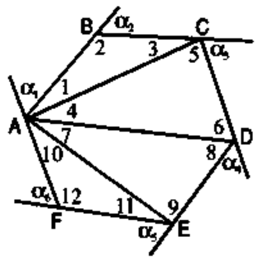


Рис. 4.104

4*. Рис. 4.100.

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = (\angle 1 + \angle 6 + \angle 7) + \angle 2 + (\angle 3 + \angle 4) + (\angle 5 + \angle 8) + \angle 9 = (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3) + (\angle 4 + \angle 5 + \angle 6) + (\angle 7 + \angle 8 + \angle 9) = 180^\circ + 180^\circ + 180^\circ = 540^\circ$.

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = (180^\circ - \angle A) + (180^\circ - \angle B) + (180^\circ - \angle C) + (180^\circ - \angle D) + (180^\circ - \angle E) = 180^\circ \cdot 5 - (\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E) = 180^\circ \cdot 5 - 180^\circ \cdot 3 = 360^\circ$.

Вариант II

1. Рис. 4.101.

$\Delta\, EKC$ – равнобедренный с основанием EC, тогда $CK = EK$.

В $\Delta\, DKE$ $EK > KD$, тогда $KC > DK$.

2. Рис. 4.102.

$\angle BAC = 180^\circ - 2x$, $\angle ABC = 180^\circ - x$. $\angle ABC - \angle BAC = 80^\circ$, тогда $x = 80^\circ$. $\angle ABC = 100^\circ$, $\angle BAC = 20^\circ$, $\angle C = 60^\circ$.

3. Рис. 4.103.

$\angle CAD = \angle CDA = 45^\circ$, $\angle ABD = 110^\circ$, тогда $\angle BAD = 25^\circ$.

4*. Рис. 4.104.

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F = (\angle 1 + \angle 4 + \angle 7 + \angle 10) + \angle 2 + (\angle 3 + \angle 5) + (\angle 6 + \angle 8) + (\angle 9 + \angle 11) + \angle 12 = (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3) + (\angle 4 + \angle 5 + \angle 6) + (\angle 7 + \angle 8 + \angle 9) + (\angle 10 + \angle 11 + \angle 12) = 180^\circ + 180^\circ + 180^\circ + 180^\circ = 720^\circ$.

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = (180^\circ - \angle A) + (180^\circ - \angle B) + (180^\circ - \angle C) + (180^\circ - \angle D) + (180^\circ - \angle E) + (180^\circ - \angle F) = 180^\circ \cdot 6 - (\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F) = 180^\circ \cdot 6 - 180^\circ \cdot 4 = 360^\circ$.

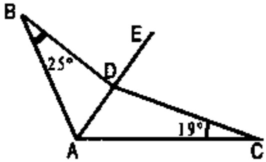


Рис. 4.105

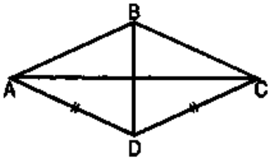


Рис. 4.106

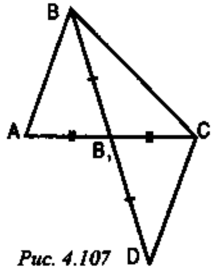


Рис. 4.107

Дополнительные задачи

Задача 1

На сторонах угла A, равного 127°, отмечены точки B и C, а внутри угла – точка D так, что $\angle ABD = 25°$, а $\angle ACD = 19°$.

Найти угол BDC.

Решение (см. рис. 4.105): $\angle BDE = \angle BAD + \angle ABD$, $\angle EDC = \angle CAD + \angle ACD$.

Тогда $\angle BDC = \angle BDE + \angle EDC = (\angle BAD + \angle ABD) + (\angle CAD + \angle ACD) = (\angle BAD + \angle CAD) + \angle ABD + \angle ACD = 127° + 25° + 19° = 171°$. (*Ответ*: $\angle BDC = 171°$.)

Задача 2

Треугольники ABC и DAC имеют общую сторону AC. Отрезок BD пересекает отрезок AC. Известно, что $BD = AD = CD$.

Докажите, что ΔADC является тупоугольным, если $\angle ABC = 130°$.

Доказательство (см. рис. 4.106): Так как $AD = DB$, то $\angle ADB = 180° - 2\angle DBA$.

$\angle BDC = 180° - 2\angle DBC$, значит, $\angle ADC = 360° - 2(\angle DBA + \angle DBC) = 360° - 2\angle ABC = 100°$, т.е. ΔADC – тупоугольный.

Задача 3

В треугольнике ABC BB_1 – медиана.

Докажите, что $BB_1 > 1/2\ (AB - BC)$.

Доказательство (см. рис. 4.107): Продолжим BB_1 на отрезок $B_1D = BB_1$, тогда $\Delta ABB_1 = \Delta CDB_1$, следовательно, $AB = CD$.

В ΔBDC $BD < BC + CD$, значит, $BD < CD - BC$.

Так как $BD = 2BB_1$, а $CD = AB$, то $2BB_1 < AB - BC$, $BB_1 < 1/2\ (AB - BC)$.

Задача 4

В треугольнике ABC $\angle A = 35°$, $\angle B = 71°$. На продолжении стороны AC за вершину C взята точка D. Из вершины C проведен луч CE так, что точки E и B лежат по разные стороны от прямой AD и $\angle ECD = 74°1'$. Может ли выполняться равенство $BE - CE = BC$?

Решение (см. рис. 4.108): $\angle ACB = 74°$. $\angle ACB \neq \angle DCE$. Если $BE - CE = BC$, то точки E, C, B лежат на одной прямой, тогда $\angle ACB = \angle DCE$, следовательно, равенство $BE - CE = BC$ выполняться не может.

Задача 5

Отрезки AC и BD пересекаются так, что $AB > AC$.

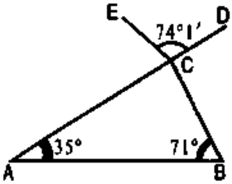


Рис. 4.108

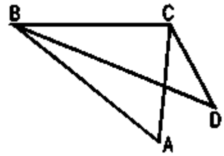


Рис. 4.109

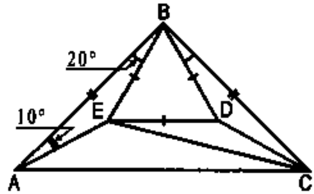


Рис. 4.110

Докажите, что $BD > CD$.

Доказательство (см. рис. 4.109): $AB > AC$, значит, $\angle BCA > \angle ABC$, тогда $\angle BCD > \angle BCA > \angle ABC > \angle DBC$, значит, в $\Delta\ BDC$ $BD > CD$.

Задача 6

В треугольнике ABC медианы пересекаются в точке M. Известно, что $\angle MAB = \angle MBA$, $\angle MCB = \angle MBC$.

Найдите угол ABC.

Указание: Докажите $MA = MB = MC$, следовательно, медианы $\Delta\ ABC$ являются его высотами, значит, $\Delta\ ABC$ – равносторонний.

Задача 7

В равнобедренном треугольнике ABC угол B равен $100°$. Внутри треугольника взята такая точка M, что $\angle MAB = 10°$, $\angle MBA = 20°$.

Найдите угол BMC.

Решение (см. рис. 4.110): Построим $BD = BM$, $\angle CBD = 20°$, тогда $\angle MBD = 60°$ и $\Delta\ MBD$ – равносторонний.

$\Delta\ ABM = \Delta\ CBD$ по двум сторонам и углу между ними, тогда $\angle BCD = 10°$, $\angle BDC = 150°$, $\angle MDC = 360° - 60° - 150° = 150°$.

Тогда $\Delta\ BCD = \Delta\ MCD$ по двум сторонам и углу между ними, $\angle DMC = 20°$, $\angle BMC = 60° + 20° = 80°$. (*Ответ*: $\angle BMC = 80°$.)

Урок 51. Прямоугольные треугольники и некоторые их свойства

Цели урока:

1) рассмотреть свойства прямоугольных треугольников;
2) научить решать задачи на применение свойств прямоугольных треугольников.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока и сформулировать его цели.

II. Актуализация знаний учащихся

Решить задачи по готовым чертежам (рисунки к задачам заранее подготовить на доске, идет фронтальная работа с классом):

1. Рис. 4.111.

Найти: $\angle A$, $\angle C$.

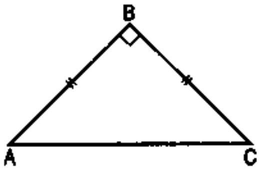


Рис. 4.111

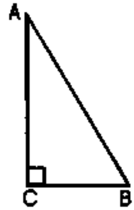


Рис. 4.112

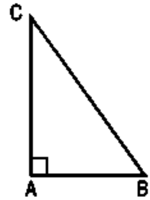


Рис. 4.113

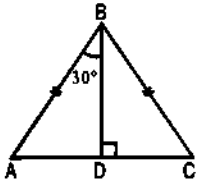


Рис. 4.114

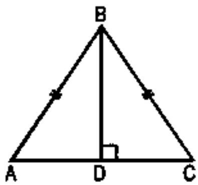


Рис. 4.115

2. Рис. 4.112.
$\angle A : \angle B = 1 : 2$.
Найти: $\angle A$, $\angle B$.
3. Рис. 4.113.
$\angle C$ на 20° меньше, чем $\angle B$.
Найти: $\angle B$, $\angle C$.
4. Рис. 4.114.
Доказать: $AD = 1/2\ AB$.
5. Рис. 4.115.
$AD = 1/2\ AB$.
Найти: углы ΔABD.

Цель решения данных задач – подготовить учащихся к изучению и доказательству свойств прямоугольных треугольников.

III. Изучение нового материала

Свойства прямоугольного треугольника можно сформулировать в виде задач на доказательство и предложить учащимся решить их самостоятельно.

(Задачу 1 можно предложить менее подготовленным учащимся, остальных учащихся разделить на два варианта и предложить I варианту решить задачу 2, II варианту – задачу 3. На решение задачи отводится 5–7 минут. Через 2–3 минуты от начала решения можно сделать подсказку к задачам 2 и 3.

Подсказка. Достройте свой треугольник до равностороннего со стороной, равной его гипотенузе.)

Задача 1

Докажите, что в прямоугольном треугольнике сумма острых углов равна 90°.

Задача 2

Докажите, что катет в прямоугольном треугольнике, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.

Задача 3

Докажите, что, если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30°.

Различные способы решения данных задач необходимо заслушать, выбрать наиболее рациональный способ и отметить, что эти три утверждения являются ***свойствами прямоугольных треугольников***.

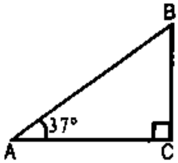


Рис. 4.116

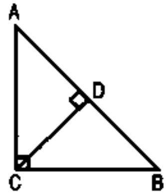


Рис. 4.117

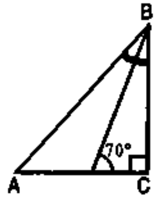


Рис. 4.118

IV. Закрепление изученного материала

1. Устно решить задачи по готовым чертежам:

1) Рис. 4.116.

Найти: $\angle B$.

2) Рис. 4.117.

Найти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle DCB$.

Доказать: ΔADC и ΔBDC – равнобедренные.

3) Рис. 4.118.

Найти: $\angle CAD$.

4) Рис. 4.119.

Найти: BC.

5) Рис. 4.120.

Найти: AC.

6) Рис. 4.121.

Найти: $\angle A$, $\angle C$.

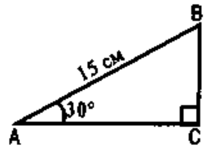


Рис. 4.119

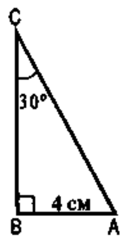


Рис. 4.120

2. Решить задачу № 257 (один ученик работает у доски, остальные – в тетрадях).

Задача № 257

Рис. 4.122.

Дано: ΔABC, $\angle C = 90°$, $\angle BAD = 120°$, $AC + AB = 18$ см.

Найти: AC, AB.

Решение: $\angle CAB + \angle BAD = 180°$, $\angle BAD = 120°$, тогда $\angle CAB = 180° - \angle BAD = 60°$.

ΔABC – прямоугольный ($\angle C = 90°$), значит, $\angle BAC + \angle B = 90°$, а так как $\angle BAC = 60°$, то $\angle B = 30°$.

Катет AC лежит против угла в 30° и он равен половине гипотенузы, т.е. $AC = 1/2\ AB$. Так как $AC + AB = 18$ см, то $1/2\ AB + AB = 18$ см, отсюда $AB = 12$ см, $AC = 6$ см. (*Ответ:* $AB = 12$ см, $AC = 6$ см.)

Наводящие вопросы:

1) Чему равны углы данного треугольника? О чем это говорит?

2) Чему равны стороны AC и AB, если их сумма равна 18 см?

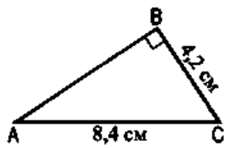


Рис. 4.121

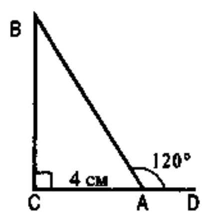


Рис. 4.122

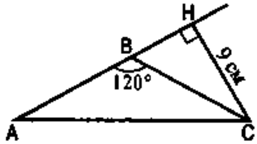


Рис. 4.123

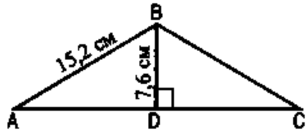


Рис. 4.124

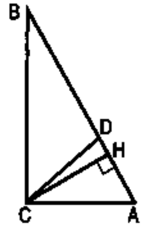


Рис. 4.125

3. Самостоятельно решить задачи: I уровень – №138, 139, 140, 141 из рабочей тетради; II уровень – №259, 260 из учебника и дополнительные задачи.

Задача № 259

Решение (см. рис. 4.123): ΔABC – равнобедренный, т.е. $\angle A = \angle BCA = (180° - 120°) : 2 = 30°$. ΔACH – прямоугольный, в нем $\angle A = 30°$, а HC – катет, лежащий против угла в 30°, значит, $AC = 2HC = 18$ см. (*Ответ*: 18 см.)

Задача № 260

Решение (см. рис. 4.124): ΔABC – прямоугольный, $BD = 1/2\ AB$, тогда $\angle A = 30°$.

ΔABC – равнобедренный, тогда $\angle C = \angle A = 30°$, $\angle ABC = 120°$. (*Ответ*: 30°, 30°, 120°.)

Дополнительные задачи:

Задача 1

Найти углы прямоугольного треугольника, если угол между биссектрисой и высотой, проведенными из вершины прямого угла, равен 15°.

Решение (см. рис. 4.125): CD – биссектриса, CH – высота, $\angle DCH = 15°$, $\angle DCA = 45°$, тогда $\angle HCA = 30°$.

ΔHCA – прямоугольный, в нем $\angle HCA = 30°$, тогда $\angle CAH = 60°$. ΔABC – прямоугольный, в нем $\angle A = 60°$, тогда $\angle B = 30°$. (*Ответ*: 30°, 60°, 90°.)

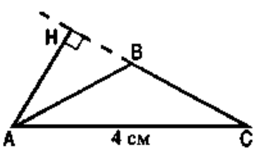


Рис. 4.126

Задача 2

В равнобедренном треугольнике один из углов 120°, а основание равно 4 см. Найдите высоту, проведенную к боковой стороне.

Решение (см. рис. 4.126): 120° – угол при вершине равнобедренного треугольника, тогда $\angle A = \angle C = 30°$. AH – высота ΔABC, тогда ΔAHC – прямоугольный, в нем $\angle C = 30°$, значит, $AH = 1/2\ AC = 2$ см. (*Ответ*: 2 см.)

Задача 3

Высота, проведенная к боковой стороне равнобедренного треугольника, делит пополам угол между основанием и биссектрисой. Найдите углы равнобедренного треугольника.

Решение (см. рис. 4.127): AD – биссектриса $\angle BAC$, AH – высота ΔABC, $\angle DAH = \angle CAH$.

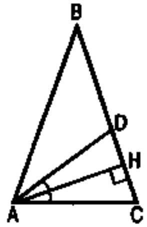


Рис. 4.127

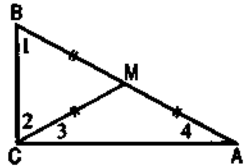


Рис. 4.128

Так как AD – биссектриса $\angle BAC$, то $\angle BAD = \angle DAC$, но $\angle DAC = \angle DAH + \angle CAH$, причем $\angle DAH = \angle CAH$, тогда $\angle CAH = 1/4 \angle BAC$.

ΔABC – равнобедренный, поэтому $\angle BAC = \angle BCA$, значит, $\angle CAH = 1/4 \angle BCA$. ΔACH – прямоугольный, значит, $\angle CAH + \angle HCA = 90°$, тогда $1/4 \angle HCA + \angle HCA = 90°$, $\angle HCA = 72°$, следовательно, $\angle BCA = \angle BAC = 72°$, $\angle ABC = 36°$. (*Ответ*: 72°, 72°, 36°.)

Домашнее задание

1. § 34, вопросы 10, 11.
2. Решить задачи № 255, 256, 258.
3. *Дополнительные задачи:*

Задача 1

Докажите, что, если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

Дано: $CM = BM = MA$ (см. рис. 4.128).

Доказать: ΔABC – прямоугольный.

Доказательство: ΔCBM – равнобедренный, значит, $\angle 1 = \angle 2$. ΔCMA – равнобедренный, значит, $\angle 3 = \angle 4$.

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180°$, так как $\angle B + \angle BCA + \angle A = 180°$.

$2 \cdot (\angle 2 + \angle 3) = 180°$, значит, $\angle 2 + \angle 3 = 90°$, т.е. $\angle BCA = 90°$.

Задача 2

Докажите, что, если треугольник прямоугольный, то медиана, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

Доказательство (см. рис. 4.127): Пусть $CM \neq MA$ и $CM \neq MB$.

Для определенности пусть $CM > MA$, тогда $CM > MB$, следовательно, $\angle 4 > \angle 3$, $\angle 1 > \angle 2$, но $\angle 1 + \angle 4 = 90°$, тогда $\angle 2 + \angle 3 > 90°$, что противоречит тому, что $\angle C = 90°$.

Таким же образом можно получить противоречие для случая $CM < MA$, $CM < MB$. Значит, $CM = MA = MB$.

Урок 52. Решение задач на применение свойств прямоугольных треугольников

Цели урока:

1) закрепить основные свойства прямоугольных треугольников;

2) рассмотреть признак прямоугольного треугольника и свойство медианы прямоугольного треугольника;
3) совершенствовать навыки решения задач на применение свойств прямоугольного треугольника.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока и сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

1. Теоретический опрос.

Подготовить у доски доказательства свойств прямоугольных треугольников с последующим заслушиванием всем классом:

а) свойство острых углов прямоугольного треугольника;

б) свойство катета прямоугольного треугольника, лежащего против угла в 30°;

в) свойство катета прямоугольного треугольника, равного половине гипотенузы.

2. Самостоятельное решение задач (пока у доски готовятся свойства прямоугольного треугольника) с последующим обсуждением решения.

I уровень

Заполнить пропуски в решении задачи:

В равнобедренном треугольнике один из внешних углов равен 60°, высота, проведенная к боковой стороне, равна 5 см. Найдите основание треугольника.

Решение (см. рис. 4.129): Так как внешний угол равен 60°, то смежный с ним внутренний угол равен ...

Этот угол может быть только углом, противолежащим основанию, так как он...

Так как ΔABC – равнобедренный с основанием AC, то $\angle A = ... = ...$

Так как AH – высота, то ΔAHC – ...

В ΔAHC $\angle C = 30°$, значит, $AH = ...$

Так как $AH = 5$ см, то $AC = ...$. (*Ответ*: $AC = ...$.)

II уровень

Продолжить решение задачи:

Высота и медиана, проведенные из одной вершины треугольника, разделили его угол на три равные части. Найдите углы треугольника.

Решение (см. рис. 4.130): Пусть CH – высота, CM – медиана ΔABC, $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$.

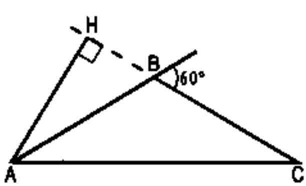


Рис. 4.129

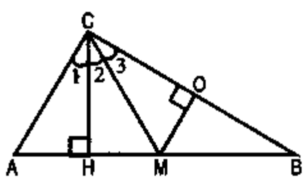


Рис. 4.130

Проведем $OM \perp CB$, тогда $\Delta ACH = \Delta MCH$ по ...

$\Delta CMH = \Delta CMO$ по ...

Тогда $AH = HM = MO = 1/2\ MA = 1/2\ MB$. (*Ответ*: $\angle A = 60°$, $\angle B = 30°$, $\angle C = 90°$.)

3. Индивидуальное решение задач №142, 143 из рабочей тетради (3–4 ученика, тетради собрать на проверку в конце урока).

4. Обсуждение решения дополнительных домашних задач.

(Рисунки к задачам подготовить на доске заранее.)

После обсуждения нужно отметить, что эти две задачи – еще два свойства прямоугольных треугольников, они очень часто используются при решении задач. Итак:

1) Свойство медианы прямоугольного треугольника, проведенной из вершины прямого угла:

В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

2) Признак прямоугольного треугольника:

Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то этот треугольник прямоугольный.

III. Решение задач

1. Решить задачи №144, 145 из рабочей тетради (один из учащихся по указанию учителя читает задачу с решением, заполняя пропуски, остальные внимательно слушают и исправляют ошибки).

2. Решить задачу с подробным обсуждением:

Гипотенуза прямоугольного треугольника в четыре раза больше проведенной в ней высоты. Найдите острые углы треугольника.

Рис. 4.131

Решение (см. рис. 4.131): CH – высота. Пусть $CH = x$, тогда $AB = 4x$. Проведем медиану CM, $CM = 1/2\ AB = 2x$, $BM = AM = 2x$.

В ΔCHM $\angle H = 90°$, $CH = x$, $CM = 2x$, тогда $\angle HMC = 30°$, следовательно, $\angle AMC = 150°$.

ΔAMC – равнобедренный, тогда $\angle A = \angle MCA = 15°$.

ΔABC – прямоугольный, $\angle A = 15°$, тогда $\angle B = 75°$. (*Ответ*: 15°, 75°.)

Наводящие вопросы:

1) Пусть $CH = x$. Чему равно AB?

2) Проведите медиану CM. Чему она равна?

3) Чему равны углы $\Delta\ CHM$?

4) Чему равен $\angle A$ треугольника ACM?

5) Чему равен $\angle B$ треугольника ABC?

3. Самостоятельное решение задач с последующей самопроверкой по готовым указаниям и ответам.

I уровень

1) Рис. 4.132.

Найти: BC.

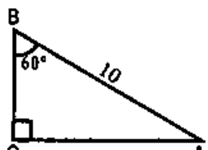


Рис. 4.132

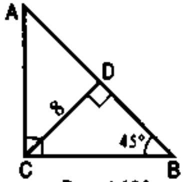


Рис. 4.133

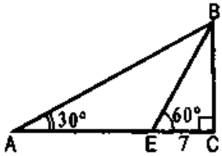


Рис. 4.134

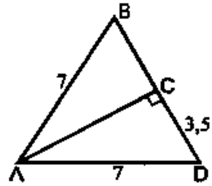


Рис. 4.135

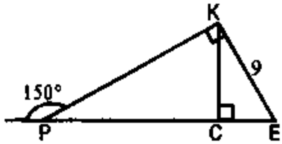


Рис. 4.136

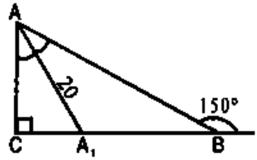


Рис. 4.137

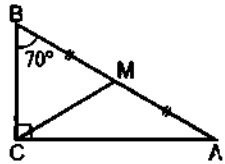


Рис. 4.138

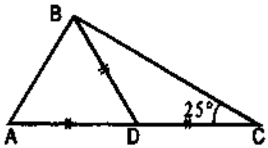


Рис. 4.139

2) Рис. 4.133.
Найти: AB.
3) Рис. 4.134.
Найти: AE.
4) Рис. 4.135.
Найти: $\angle B$, $\angle D$.
5) Рис. 4.136.
Найти: CE, $\angle C$.
6) Рис. 4.137.
Найти: CA_1.
7) Рис. 4.138.
Найти: $\angle MCA$.
8) Рис. 4.139.
Найти: $\angle A$, $\angle ABC$.

II уровень

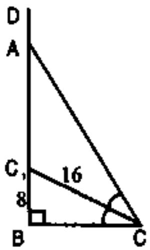


Рис. 4.140

1) Рис. 4.140.
Найти: $\angle CAD$.
2) Рис. 4.141.
Найти: AD.
3) Рис. 4.142.
Дано: $AC = DC = 4$.
Найти: BF.
4) Рис. 4.143.
Найти: MD.

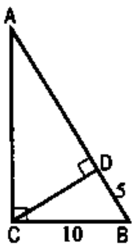


Рис. 4.141

5) В треугольнике ABC угол B – тупой. Продолжения высот AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке O, $\angle AOC = 60°$.
Найдите $\angle ABC$.

6) В треугольнике ABC $\angle B = 90°$, BD – высота, $AB = 2BD$.

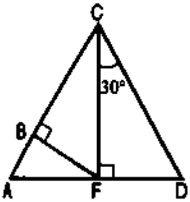


Рис. 4.142

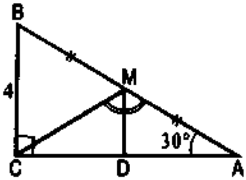


Рис. 4.143

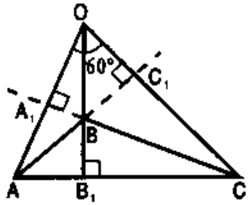


Рис. 4.144

Докажите, что $3AC = 4AD$.

7) В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $\angle B = 40°$. На сторонах AB и BC отмечены точки D и E соответственно, $\angle EAD = 5°$, $\angle ECD = 10°$.

Найдите $\angle EDC$.

8) На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC взята точка E, а внутри треугольника – точка D. $EM \perp AC$, $AM = CM$, $\angle B = 45°$, $\angle CDA = 90°$, $\angle DCA = 60°$.

Докажите, что $EM = DC$.

Ответы и указания для самопроверки:

I уровень

1) $BC = 5$.
2) $AB = 16$.
3) $AE = 14$.
4) $\angle B = \angle D = 60°$.
5) $CE = 4{,}5$; $PC = 13{,}5$.
6) $CA_1 = 10$.
7) $\angle MCA = 20°$.
8) $\angle A = 65°$, $\angle ABC = 90°$.

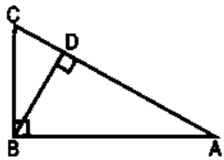


Рис. 4.145

II уровень

1) $\angle CAD = 150°$.
2) $AD = 15$.
3) $BF = 1$.
4) $MD = 2$.
5) Рис. 4.144.

$\angle OAC_1 = 30°$, тогда $\angle A_1BA = 60°$, $\angle ABC = 120°$.

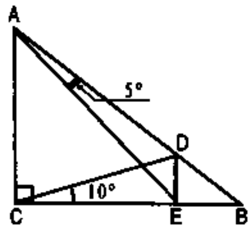


Рис. 4.146

6) *Доказательство* (см. рис. 4.145.): $AB = 2BD$, тогда $\angle A = 30°$, $\angle C = 60°$, значит, $\angle CBD = 30°$, тогда $CD = 1/2\ CB$, т.е. $CB = 2CD$. $CB = 1/2\ AC$, тогда $2CD = 1/2\ AC$.

$CD = AC - AD$, тогда $2 \cdot (AC - AD) = 1/2\ AC$, $3/2\ AC = 2AD$, т.е. $3AC = 4AD$.

7) *Решение* (см. рис. 4.146): ΔACE – равнобедренный, так как $\angle CAE = \angle CEA = 45°$, тогда $CA = CE$. ΔACD – равнобедренный, так как $\angle CAD = \angle CDA = 50°$, тогда $CA = CD$.

$CA = CE = CD$, тогда ΔCDE – равнобедренный с основанием DE, значит, $\angle CED = \angle CDE = 85°$. (*Ответ*: $\angle EDC = 85°$.)

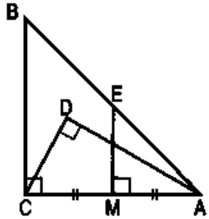


Рис. 4.147

8) *Доказательство* (см. рис. 4.147): В ΔABC $\angle B = \angle BAC = 45°$, тогда $\angle AEM = 45°$ и $AM = ME$.

В ΔCDA $\angle CDA = 90°$, $\angle DCA = 60°$, тогда $\angle CAD = 30°$ и CD 1/2 $AC = AM$, следовательно, $CD = EM$.

Домашнее задание

§ 35, вопросы 12, 13.

Признаки равенства прямоугольных треугольников по двум катетам и по катету и прилежащему к нему острому углу смогут самостоятельно доказать все учащиеся. Большинство учащихся с помощью учебника разберется с доказательством признака равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу. Более подготовленные учащиеся смогут подготовить доказательство признака равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету.

Урок 53. Признаки равенства прямоугольных треугольников

Цели урока:

1) рассмотреть признаки равенства прямоугольных треугольников;
2) научить решать задачи на применение признаков равенства прямоугольных треугольников.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока и сформулировать цели.

II. Повторение. Проверка домашнего задания

1. Сформулировать и доказать у доски признаки равенства прямоугольных треугольников:

(К доске вызвать 4 учащихся для подготовки вопросов, остальные учащиеся решают задачи по готовым чертежам.)

а) по двум катетам;

б) по катету и прилежащему к нему острому углу;

в) по гипотенузе и острому углу;

г) по гипотенузе и катету.

2. Решение задач по готовым чертежам.

(Рисунки к задачам подготовить на планшетах или раздать на каждую парту.)

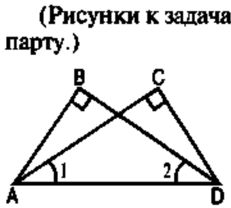


Рис. 4.148

1) Рис. 4.148.

Доказать: $\Delta ABD = \Delta DCA$, $AB = CD$.

2) Рис. 4.149.

Доказать: $\Delta ABC = \Delta CDA$.

3) Рис. 4.150.

Дано: $AB \parallel CD$.

Доказать: $BF = ED$.

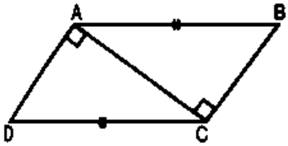


Рис. 4.149

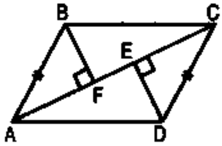


Рис. 4.150

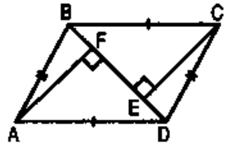


Рис. 4.151

4) Рис. 4.151.

Доказать: $BF = ED$, $AF = EC$.

5) Рис. 4.152.

Доказать: $AE = MB$.

6) Рис. 4.153.

Доказать: O – середина отрезка AB.

III. Решение задач

1. Решить задачу №149 из рабочей тетради. (Один из учащихся читает задачу и предлагает свой способ доказательства, остальные, выслушав его ответ, исправляют ошибки или соглашаются с предложенным решением.)

2. Решить задачу № 263 письменно у доски и в тетрадях.

Задача № 263

Решение (см. рис. 4.154): $\Delta BC_1C = \Delta CB_1B$ по гипотенузе и острому углу ($\angle C_1BC = \angle B_1CB$, BC – общая гипотенуза).

Следовательно, $\angle C_1CB = \angle B_1BC$, но тогда ΔMBC – равнобедренный с основанием BC и $\angle MBC = \angle MCB = 20°$.

В ΔBC_1C $\angle C_1 = 90°$, тогда $\angle C_1BC + \angle BCC_1 = 90°$, значит, $\angle C_1BC = 70°$.

Так как ΔABC – равнобедренный, то $\angle ABC = \angle ACB = 70°$, а $\angle BAC = 40°$. (*Ответ*: 70°, 70°, 40°.)

Наводящие вопросы:

1) Что вы можете сказать о треугольниках BC_1C и CB_1B? А о треугольнике BMC?

2) Вычислите углы треугольника BMC.

3) Знаем ли мы величину хотя бы одного из углов треугольника ABC? Вычислите остальные углы этого треугольника.

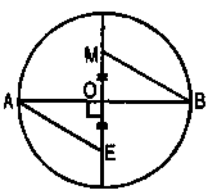


Рис. 4.152

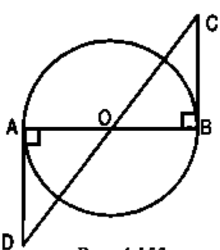


Рис. 4.153

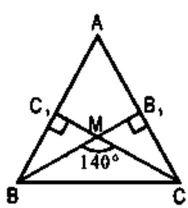


Рис. 4.154

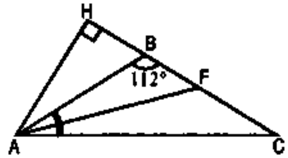


Рис. 4.155

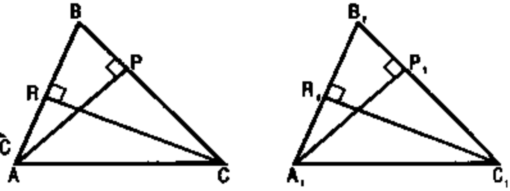


Рис. 4.156

3. Самостоятельно решить задачи: I уровень – №146, 147, 148 из рабочей тетради; II уровень – №261, 265, 267 из учебника.

Задача № 265

Решение (см. рис. 4.155): ΔABC – равнобедренный, тогда $\angle BAC = \angle BCA = (180° - 112°) : 2 = 34°$. AF – биссектриса $\angle BAC$, значит, $\angle BAF = 17°$.

В ΔABF $\angle BFA = 180° - (\angle ABF + \angle BAF) = 51°$.

В ΔAHF $\angle HAF = 90° - \angle HFA = 90° - 51° = 39°$. (*Ответ*: $\angle AHF = 90°$, $\angle HAF = 39°$, $\angle HFA = 51°$.)

Задача № 267

Доказательство (см. рис. 4.156): Пусть ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ – указанные остроугольные треугольники, в которых $AP = A_1P_1$, $CR = C_1R_1$; AP, A_1P_1, CR, C_1R_1 – высоты. $\Delta APC = \Delta A_1P_1C_1$ по гипотенузе и катету, $\angle C = \angle C_1$.

$\Delta ARC = \Delta A_1R_1C_1$ по гипотенузе и катету, отсюда $\angle A = \angle A_1$, следовательно, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по стороне и прилежащим к ней углам.

Дополнительные задачи:

Задача 1

На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки D и E соответственно. Из этих точек опущены перпендикуляры DK и EP к прямой AC, $DK = EP$, $\angle ADK = \angle PEC$. Докажите, что $AB = BC$.

Задача 2

В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ высоты BD и B_1D_1 равны, причем $\angle C = \angle C_1$, $AD = A_1D_1$. Докажите, что $\angle A = \angle A_1$.

Домашнее задание

1. § 35, вопросы 12, 13.
2. Решить задачи № 262, 264, 265.

Урок 54. Прямоугольный треугольник. Решение задач

Цели урока:

1) привести в систему знания учащихся по теме «Прямоугольный треугольник»;
2) совершенствовать навыки решения задач на применение свойств прямоугольного треугольника, признаков равенства прямоугольных треугольников.

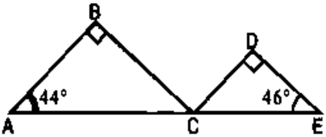


Рис. 4.157

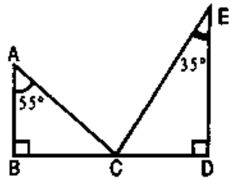


Рис. 4.158

Ход урока

I. Организационный момент

Сформулировать тему и цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

Решение задач на готовых чертежах с целью повторения свойств прямоугольного треугольника и признаков равенства прямоугольных треугольников.

(Рисунки к задачам подготовить на доске или на планшетах заранее. Идет фронтальная работа с классом.)

1. Рис. 4.157.
Доказать: $BC \perp CD$.

2. Рис. 4.158.
Найти: $\angle ACE$.

3. Рис. 4.159.
Дано: $BH = 4$ см.
Найти: AH.

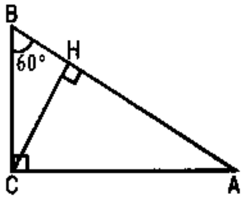


Рис. 4.159

4. Рис. 4.160.
Дано: $AB \parallel CD$.
Найти: углы $\Delta\ CDO$.

5. Рис. 4.161.
Дано: O – общая середина AB и CD, $AB \perp CD$.
Доказать: $AC = DB$.

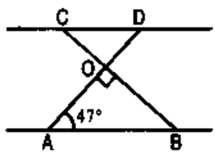


Рис. 4.160

6. Рис. 4.162.
Доказать: MC – медиана $\Delta\ KMN$.

7. Рис. 4.163.
Дано: BD – биссектриса $\angle ABC$.
Доказать: DB – биссектриса $\angle ADC$.

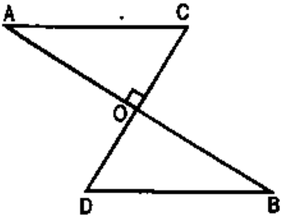


Рис. 4.161

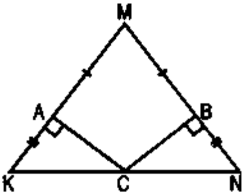


Рис. 4.162

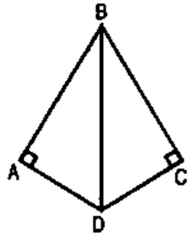


Рис. 4.163

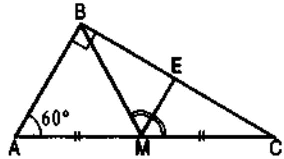


Рис. 4.164

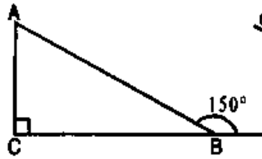


Рис. 4.165

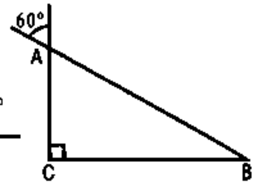


Рис. 4.166

8. Рис. 4.164.
Дано: $BM = 5$ см.
Найти: ME.

III. Самостоятельная работа

I уровень

Вариант I

1. Рис. 4.165.
Найти острые углы треугольника ABC.

2. Высота остроугольного треугольника ABC образует со сторонами, выходящими из той же вершины, углы 18° и 46°.
Найдите углы треугольника ABC.

3. *Докажите* равенство прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу.

Вариант II

1. Рис. 4.166.
Найти острые углы треугольника ABC.

2. Высота остроугольного треугольника ABC образует со сторонами, выходящими из той же вершины, углы 24° и 38°.
Найдите углы треугольника ABC.

3. *Докажите* равенство прямоугольных треугольников по катету и противолежащему углу.

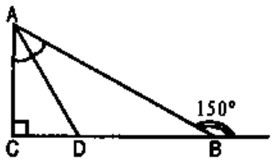


Рис. 4.167

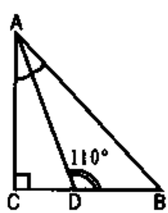


Рис. 4.168

II уровень

Вариант I

1. Рис. 4.167.
Дано: AD – биссектриса угла A.
Найти: острые углы треугольника ADC.

2. Биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника образует с гипотенузой углы, один из которых равен 70°.
Найдите острые углы этого треугольника.

3. *Докажите* равенство прямоугольных треугольников по катету и высоте, опущенной на гипотенузу.

Вариант II

1. Рис. 4.168.
Дано: AD – биссектриса угла A.
Найти: острые углы треугольника ABC.

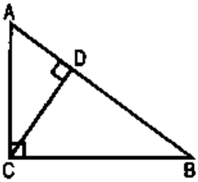


Рис. 4.169

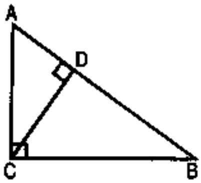


Рис. 4.170

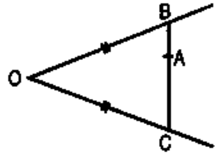


Рис. 4.171

2. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, образует с одним из катетов угол $55°$.

Найдите острые углы этого треугольника.

3. *Докажите* равенство прямоугольных треугольников по острому углу и высоте, опущенной на гипотенузу.

III уровень

Вариант I

1. Рис. 4.169.

Дано: $\angle ACB = 90°$, $\angle DCB = 50°$, CD – высота.

Найти: острые углы треугольника ABC.

2. Угол между биссектрисой и высотой, проведенными из вершины наибольшего угла прямоугольного треугольника, равен $14°$.

Найдите острые углы данного треугольника.

3. *Докажите* равенство остроугольных треугольников по двум углам и высоте, проведенной из вершины третьего угла.

Вариант II

1. Рис. 4.170.

Дано: $\angle ACB = 90°$, $\angle B = 40°$, CD – высота.

Найти: острые углы треугольника ACD.

2. Угол между биссектрисой и высотой, проведенными из вершины наибольшего угла прямоугольного треугольника, равен $22°$.

Найдите острые углы данного треугольника.

3. *Докажите* равенство остроугольных треугольников по стороне и проведенным к ней медиане и высоте.

Домашнее задание

1. § 36.

2. Решить задачи № 268, 269, 270.

Задача № 270

Анализ (см. рис. 4.171): Пусть B и C – искомые точки, т.е. $OB = OC$, тогда $\Delta\ OBC$ – равнобедренный, а точка A принадлежит его основанию BC. Биссектриса OK данного треугольника является его высотой, т.е. $OK \perp BC$.

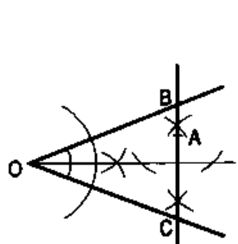


Рис. 4.172

Построение (см. рис. 4.172):

1. Построим биссектрису OK угла O.

2. Построим перпендикуляр к прямой OK, проходящий через точку A.

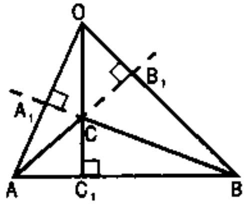


Рис. 4.173

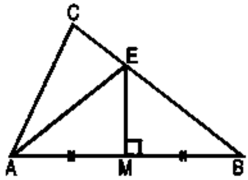


Рис. 4.174

3. Перпендикуляр пересекает стороны угла O в точках B и C. BC – искомая прямая.

Доказательство: Прямоугольные треугольники OBK и OCK равны по катету и острому углу ($\angle BOK = \angle COK$, так как OK – биссектриса $\angle BOC$, OK – общий катет), тогда $OB = OC$. ($\angle BKO = 90°$, $\angle CKO = 90°$, так как $AK \perp OK$).

3. *Дополнительные задачи:*

Задача 1

В ΔABC угол C тупой. Продолжения высот AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O. Докажите, что $\angle ABC = \angle AOC$ и $\angle OAC = \angle OBC$.

Решение (см. рис. 4.173):

1) В ΔBCC_1 $\angle C_1BC = 90° - \angle BCC_1 = \angle ABC$. В ΔOCA_1 $\angle A_1OC = 90° - \angle A_1CO = \angle AOC$. $\angle BCC_1 = \angle A_1CO$ как вертикальные, тогда $\angle ABC = \angle AOC$.

2) В ΔA_1AC $\angle A_1AC = 90° - \angle A_1CA = \angle OAC$. В ΔB_1BC $\angle B_1BC = 90° - \angle B_1CB = \angle OBC$. $\angle A_1CA = \angle B_1CB$ как вертикальные, тогда $\angle OAC = \angle OBC$.

Задача 2

Через середину стороны AB треугольника ABC проведена прямая, перпендикулярная к AB, пересекающая BC в точке E. $BC = 24$ см, периметр треугольника AEC равен 30 см.

Найдите AC.

Решение (см. рис. 4.174): $\Delta AEM = \Delta BEM$ по двум катетам, тогда $AE = BE$.

$P_{AEC} = AC + AE + CE$, но так как $AE = BE$, то $P_{AEC} = AC + (BE + CE) = AC + CB = 24 + AC = 30$, откуда $AC = 6$ см. (*Ответ*: $AC = 6$ см.)

Урок 55. Расстояние от точки до прямой. Расстояние между параллельными прямыми

Цели урока:

1) ввести понятие наклонной, проведенной из точки, не лежащей на данной прямой, к этой прямой; расстояние от точки до прямой; расстояние между параллельными прямыми;
2) рассмотреть свойство параллельных прямых;
3) научить учащихся решать задачи на нахождение расстояния от точки до прямой и расстояния между параллельными прямыми.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

1. Проверить дополнительные домашние задачи и задачу №270, последнюю рассмотреть подробно, так как данная задача является одной из первых задач на построение, при решении которой не обойтись без анализа.

(Предложить двум ученикам, справившимся с решением дополнительных задач, подготовить на доске краткую запись их решения и заслушать в начале урока. К задаче №270 заранее подготовить рисунок, соответствующий условиям задачи и предложить одному из учащихся показать ход построения.)

2. Повторить понятие перпендикуляра, проведенного из данной точки к данной прямой (фронтальная работа с классом):

– Какие прямые называются перпендикулярными?

– Что называют перпендикуляром, проведенным из данной точки к данной прямой?

– Сколько перпендикуляров можно провести из точки, не лежащей на данной прямой, к данной прямой?

3. Используя рис. 4.175, укажите (фронтальная работа с классом):

а) отрезок, который является перпендикуляром, проведенным из точки A к прямой a;

б) отрезки не являющиеся перпендикулярами, проведенными из точки A к прямой a;

в) основание перпендикуляра, проведенного из точки A к прямой a;

г) отрезок наименьшей длины, проведенный из точки A к прямой a.

III. Изучение нового материала

1. Ввести понятие наклонной (рис. 4.176).

В тетрадях учащихся и на доске записи:

AC – перпендикуляр; AB, AD – наклонные.

$AC < AB$, $AC < AD$, так как AC – катет в прямоугольных треугольниках ABC и ADC, AB и AD – их гипотенузы.

***Вывод*:**

Перпендикуляр, проведенный из точки к прямой, меньше любой наклонной, проведенной из той же точки к этой прямой.

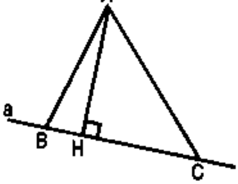


Рис. 4.175

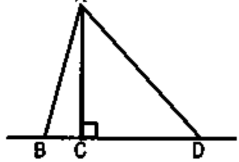


Рис. 4.176

2. Ввести понятие расстояния то точки до прямой.

Определение:

Длина перпендикуляра, проведенного из точки к прямой, называется ***расстоянием от этой точки до прямой.***

3. Доказать свойство параллельных прямых.

Теорема:

Все точки каждой из двух параллельных прямых равноудалены от другой прямой.

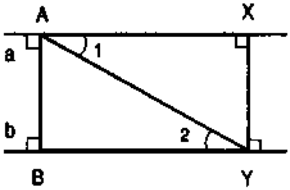


Рисунок к теореме

Доказательство: Пусть $a \parallel b$, A – произвольная точка прямой a, $AB \perp b$, $B \in b$.

Нужно доказать, что расстояние от любой точки X прямой a до прямой b равно AB (см. рис.).

Дальнейшее доказательство теоремы можно провести совместно с учащимися.

Вопросы для учащихся:

1) Чему равно расстояние от точки X прямой а до прямой B? (*Ответ:* длине перпендикуляра, опущенного из точки X на прямую b.)

2) Отметим основание перпендикуляра буквой Y. Каково взаимное расположение XY и прямой b? Почему? (*Ответ:* $XY \perp b$, так как $XY \perp$ $\perp a$, $a \parallel b$.)

3) Что вы можете сказать о треугольниках ABY и YXA? (*Ответ:* $\Delta ABY = \Delta YXA$ по гипотенузе и острому углу (AY – общая гипотенуза, $\angle 1 = \angle 2$ как накрест лежащие при параллельных прямых a и b и секущей AY).

4) Сравните AB и XY. (*Ответ:* $XY = AB$.)

Вывод: любая точка X прямой а находится на расстоянии AB от прямой b.

4. Ввести понятие расстояния между параллельными прямыми.

Определение:

Расстояние от произвольной точки одной из параллельных прямых до другой прямой называется *расстоянием между* этими *прямыми.*

5. Рассмотреть и доказать теорему, обратную свойству параллельных прямых.

Теорема:

Все точки плоскости, расположенные по одну сторону от данной прямой и равноудаленные от нее, лежат на прямой, параллельной данной.

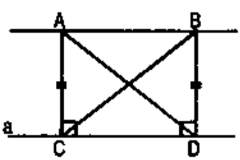


Рис. 4.177

Пусть произвольные точки A и B расположены по одну сторону от прямой a и расстояние от точки A до прямой a равно расстоянию от точки B до прямой a, т.е. $AC = BD$, где $AC \perp a$, $BD \perp a$.

Докажем, что $AB \parallel a$.

Доказательство (см. рис. 4.177): Так как $AC \perp$ а и $BD \perp$ а, то $AC \parallel BD$, значит, накрест лежащие углы ACB и CBD равны.

$\Delta ACB = \Delta DBC$ по двум сторонам и углу между ними ($AC = BD$ по условию теоремы, BC – общая сторона, $\angle ACB = \angle CBD$ как накрест лежащие при параллельных прямых AC и BD и секущей BC), следовательно, $\angle ABC = \angle BCD$.

$\angle ABC$ и $\angle BCD$ – накрест лежащие углы при прямых AB и CD и секущей BC и они равны, следовательно, $AB \parallel CD$, т.е. $AB \parallel a$, что и требовалось доказать.

6. Знакомство с рейсмусом.

IV. Закрепление изученного материала

1. Решить задачи №150, 151 из рабочей тетради. (Один из учащихся читает задачу, а затем решает ее, остальные внимательно слушают его и исправляют ошибки.)

2. Решить задачи №273, 276 (один ученик работает у доски, остальные в тетрадях).

Задача № 273

Решение (см. рис. 4.178): $CE + CD = 31$ см, $CE - CD = 3$ см, тогда $CE = CD + 3$ см, значит, $CE + CD = (CD + 3) + CD = 31$ см, откуда $CD = 14$ см.

Расстояние от вершины C до прямой DE равно CD, т.е. 14 см. (*Ответ*: 14 см.)

Задача № 276

Решение (см. рис. 4.179): O – середина AB, тогда $AO = BO$. AD и BC – расстояние от концов отрезка AB до прямой a ($AD \perp a$, $BC \perp a$). $\Delta AOD = \Delta BOC$ по гипотенузе и острому углу ($AO = OB$, $\angle AOD = \angle BOC$ как вертикальные), тогда $AD = CB$, то есть концы отрезка AB равноудалены от прямой a.

3. Самостоятельно решить задачи: I уровень – №152–155 из рабочей тетради; II уровень –№271, 275, 278 из тетради.

Задача № 271

Решение (см. рис. 4.180): AB – перпендикуляр, AC – наклонная. $AC - AB = 1$ см, тогда $AC = AB + 1$ см, $AC + AB = AB + 1 + AB = 17$ см, отсюда $AB = 8$ см, т.е. расстояние от точки A до прямой a равно 8 см. (*Ответ*: 8 см.)

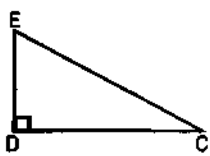


Рис. 4.178

Задача № 275

Решение (см. рис. 4.181): $ME \perp AC$, $MK \perp BC$, $ME = MK$. ΔABC – равнобедренный, тогда

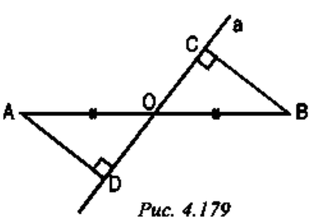


Рис. 4.179

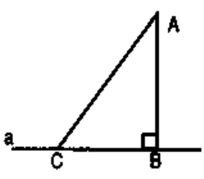


Рис. 4.180

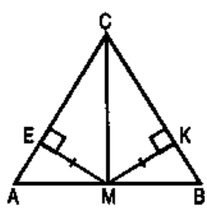


Рис. 4.181

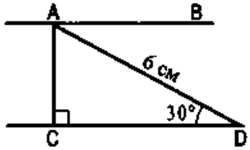


Рис. 4.182

$\angle A = \angle B$. $\Delta EMA = \Delta KMB$ по катету и прилежащему к нему острому углу ($ME = MK$, $\angle EMA = \angle KMB$.

Так как $\angle EMA = 90° - \angle A = 90° - \angle B = \angle KMB$), тогда $AM = MB$ и CM – медиана, проведенная из вершины равнобедренного треугольника к его основанию, а значит, и его высота.

Задача № 278

Решение (см. рис. 4.182): Расстояние между прямыми AB и CD равно AC. ΔACD – прямоугольный, $\angle D = 30°$, тогда $AC = 1/2\ AB = 3$ см. (*Ответ*: 3 см.)

Домашнее задание

1. § 37, вопросы 14–18.
2. Решить задачи №272, 277.
3. Выполнить работу над ошибками самостоятельной работы предыдущего урока, используя готовые указания и ответы к задачам.

Ответы и указания к задачам самостоятельной работы

I уровень

Вариант I

1. $\angle B = 30°$, $\angle A = 60°$.
2. 72°, 44°, 64°.
3. Рис. 4.183.

$\angle B = 90° - \angle A$, $\angle B_1 = 90° - \angle A_1$. Так как $\angle A = \angle A_1$, то $\angle B = \angle B_1$. Тогда $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по стороне и прилежащим к ней углам ($AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$).

Вариант II

1. $\angle A = 60°$, $\angle B = 30°$.
2. 66°, 52°, 62°.
3. Рис. 4.184.

$\angle B = 90° - \angle A$, $\angle B_1 = 90° - \angle A_1$. Так как $\angle A = \angle A_1$, то $\angle B = \angle B_1$, тогда $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по стороне и прилежащим к ней углам ($BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90°$).

II уровень

Вариант I

1. $\angle CAD = 30°$, $\angle ADC = 60°$.

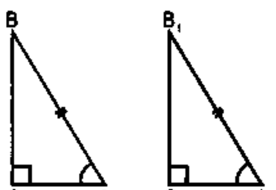


Рис. 4.183

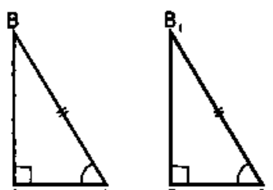


Рис. 4.184

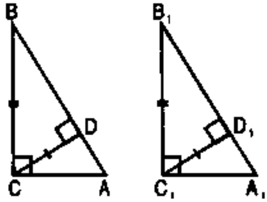


Рис. 4.185

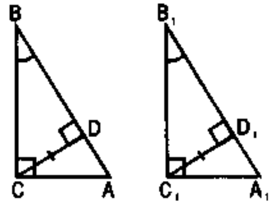


Рис. 4.186

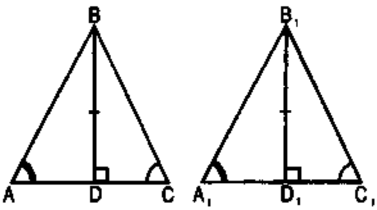


Рис. 4.187

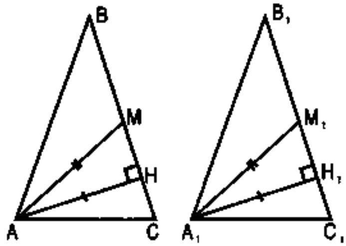


Рис. 4.188

2. 65°, 25°.

3. Рис. 4.185.

$\Delta\, BCD = \Delta\, B_1C_1D_1$ по гипотенузе и катету, тогда $\angle B = \angle B_1$. $\Delta\, ABC = \Delta\, A_1B_1C_1$ по катету и прилежащему к нему острому углу.

Вариант II

1. $\angle BAC = 40°$, $\angle ABC = 50°$.

2. 35°, 55°.

3. Рис. 4.186.

$\Delta\, BCD = \Delta\, B_1C_1D_1$ по катету и прилежащему к нему острому углу, тогда $BC = B_1C_1$. $\Delta\, ABC = \Delta\, A_1B_1C_1$ по катету и прилежащему к нему острому углу.

III уровень

Вариант I

1. $\angle B = 40°$, $\angle A = 50°$.

2. 31°, 59°.

3. Рис. 4.187.

$\Delta\, ABD = \Delta\, A_1B_1D_1$, тогда $AB = A_1B_1$, $AD = A_1D_1$.

$\Delta\, CBD = \Delta\, C_1B_1D_1$, тогда $DC = D_1C_1$, следовательно, $AD + DC = A_1D_1 + D_1C_1$, т.е. $AC = A_1C_1$.

$\Delta\, ABC = \Delta\, A_1B_1C_1$ ($AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$).

Вариант II

1. $\angle A = 50°$, $\angle ACD = 40°$.

2. 23°, 67°.

3. Рис. 4.188.

$BC = B_1C_1$, $AM = A_1M_1$, $AH = A_1H_1$, $BM = MC$, $B_1M_1 = M_1C_1$.

$\Delta AMH = \Delta A_1M_1H_1$, тогда $MH = M_1H_1$. $\Delta ABH = \Delta A_1B_1H_1$, тогда $AB = A_1B_1$. $\Delta ACH = \Delta A_1C_1H_1$, тогда $AC = A_1C_1$.

$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по трем сторонам.

Урок 56. Построение треугольника по трем элементам

Цели урока:

1) рассмотреть задачи на построение треугольника по трем элементам;
2) совершенствовать навыки решения задач на построение.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

(Фронтальная работа с классом. Рисунки к задачам подготовить на доске заранее.)

1. Теоретический опрос по вопросам 14–18.

2. Решение задач по готовым чертежам:

1) Рис. 4.189.

Найти: расстояние от точки A до прямой a.

2) Рис. 4.190.

Найти: расстояние от точки A до прямой a.

3) Рис. 4.191.

Найти: расстояние от точки A до прямой a.

4) Рис. 4.192.

Дано: $KA = 7$ см.

Найти: расстояние от точки A до прямой a.

3. Решение задач с целью подготовки учащихся к восприятию нового материала (разделить учащихся на три группы, каждая группа выполняет свое задание, затем весь класс заслушивает решение задач).

I группа

1) С помощью циркуля, линейки и транспортира постройте ΔABC, в котором $AB = 4$ см, $BC = 5$ см, $\angle B = 70°$.

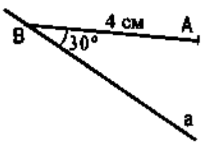


Рис. 4.189

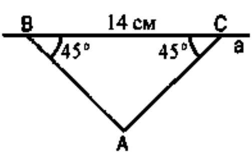


Рис. 4.190

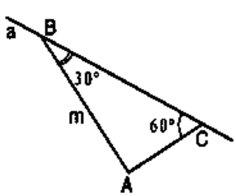


Рис. 4.191

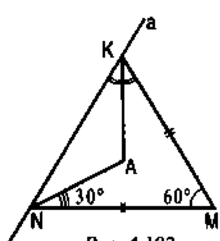


Рис. 4.192

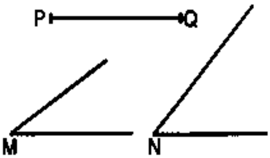


Рис. 4.193

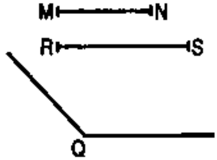


Рис. 4.194

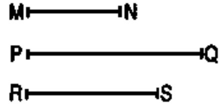


Рис. 4.195

2) С помощью циркуля и линейки постройте угол, равный данному (примерный угол задать на доске).

II группа

1) С помощью циркуля, линейки и транспортира постройте ΔABC, в котором $AB = 6$ см, $\angle A = 50°$, $\angle B = 80°$.

2) С помощью циркуля и линейки без делений на сторонах данного угла отложите отрезки, равные данному.

III группа

1) С помощью циркуля и линейки с делениями постройте ΔABC такой, что $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $AC = 7$ см.

2) С помощью циркуля и линейки без делений на данном луче отложите отрезок, равный данному.

III. Изучение нового материала

1. Продолжить работу в группах (групп может быть больше, тогда несколько групп получают одинаковое задание).

При выполнении задания учащиеся могут общаться друг с другом, обсуждать решение задачи.

I группа

Дано: Рис. 4.193.

Построить: ΔABC такой, что $AB = PQ$, $\angle A = \angle M$, $\angle B = \angle N$, с помощью циркуля и линейки без делений.

II группа

Дано: Рис. 4.194.

Построить: ΔABC такой, что $AB = MN$, $AC = RS$, $\angle A = \angle Q$, с помощью циркуля и линейки без делений.

III группа

Дано: Рис. 4.195.

Построить: ΔABC такой, что $AB = MN$, $BC = PQ$, $AC = RS$, с помощью циркуля и линейки без делений.

Общий вопрос для всех групп:

– Всегда ли можно построить такой ΔABC, который удовлетворял бы всем условиям задачи?

2. Когда группы будут готовы, заслушать решение каждой задачи, обсудить правильность решения.

3. Самостоятельно решить каждому ученику в тетради каждую задачу, озаглавив их следующим образом:

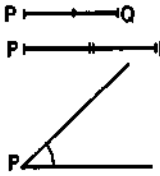


Рис. 4.196

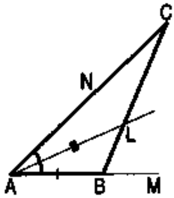


Рис. 4.197

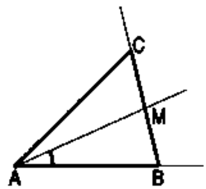


Рис. 4.198

1) первая задача – «Построение треугольника по стороне и прилежащим к ней углам»;

2) вторая задача – «Построение треугольника по двум сторонам и углу между ними»;

3) третья задача – «Построение треугольника по трем сторонам».

IV. Закрепление изученного материала

1. Решить задачу № 286 (дать учащимся 2–3 минуты на обдумывание, а затем заслушать и обсудить варианты решений).

Задача № 286

Дано (см. рис. 4.196): сторона треугольника PQ; биссектриса PM, выходящая из вершины P; угол P, прилежащий к стороне PQ.

Построить: ΔABC, где $AB = PQ$, $\angle A = \angle P$, биссектриса $AL = PM$.

Построение (см. рис. 4.197): Возьмем произвольную точку A, отложим от нее угол MAN, равный углу P.

На стороне AM отложим отрезок AB, равный PQ.

Построим биссектрису угла MAN и отложим на ней от точки A отрезок AL, равный PM.

Построим прямую через точки B и L.

$AN \neq BL = C$. ΔABC – искомый.

2. Решить самостоятельно № 288.

3. Решить самостоятельно задачу № 157 из рабочей тетради.

Домашнее задание

1. § 38, вопросы 19, 20.

2. Решить задачи № 287, 289, 274.

Задача № 287

Построение (см. рис. 4.198):

1) Построить угол A, равный углу между данной стороной и данной медианой.

2) На одной стороне угла отложить отрезок AB, равный стороне треугольника, а на другой – отрезок AM, равный медиане треугольника.

3) Построить прямую BM и на луче BM от точки M отложить отрезок MC, равный отрезку BM.

4) Соединить точки A и C отрезком. ΔABC – искомый, в нем AM – медиана ($BM = MC$), $\angle MAB$ – угол между медианой и стороной AB.

3. Прочитать задачу № 284.

Урок 57. Построение треугольника по трем элементам

Цель урока:

совершенствование навыков построения треугольников по трем элементам и решения задач на построение.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Повторение. Проверка домашнего задания

1. Теоретический опрос по вопросам 19а, 19б, 20 – три ученика готовятся у доски, а затем рассказывают всему классу после проверки домашних задач №287 и №284.

2. Проверить домашнюю задачу № 287.

3. Обсудить решение задачи № 284 по рис. 142 учебника:

1) Составить план решения задачи.

2) Почему прямая p параллельна прямой a?

3) Почему расстояние между прямыми a и p равно AB?

4) Сколько решений имеет задача? Почему?

III. Решение задач

1. Решить задачи № 285, 291 (д) с последующим обсуждением (дать учащимся на каждую задачу по 2–3 минуты, решение записать в тетрадях и на доске).

Задача № 285

Построение (см. рис. 4.199):

1) Построим прямую l, перпендикулярную прямой b и проходящую через произвольную точку X прямой b.

2) Отложим от точки X на прямой l отрезок XY, равный PQ.

3) Построим прямую c, перпендикулярную прямой l и проходящую через точку Y.

4) Точку пересечения a и c обозначим A. Точка A прямой a удалена от прямой b на расстояние PQ, т.е. A – искомая точка.

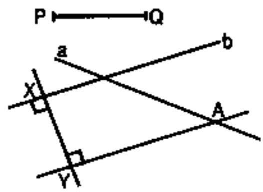


Рис. 4.199

Задача имеет два решения: отрезок XY на прямой l можно отложить в разные стороны от прямой b.

Задача № 291 (д)

Дано: медиана PQ, проведенная к основанию; основание равнобедренного треугольника ST.

Построение (рис. 4.200): Так как медиана, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, является его высотой, то ход построения будет следующим:

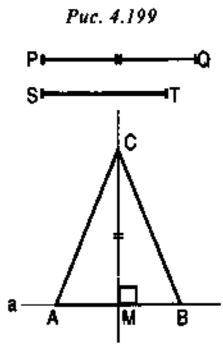


Рис. 4.200

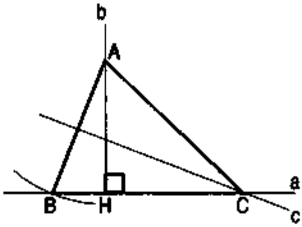


Рис. 4.201

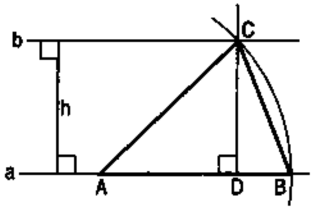


Рис. 4.202

1) На прямой a отложим отрезок AB, равный ST.

2) Постоим середину отрезка AB – точку M.

3) Через точку M построим прямую b, перпендикулярную прямой a, и отложим на этой прямой b от точки M отрезок MC, равный PQ.

4) Соединим точки A и C, B и C отрезками. ΔABC – искомый.

Задача имеет два решения: на прямой b от точки M можно отложить два отрезка, равных PQ.

2. Самостоятельно решить задачи № 291 (а), (в), 292 (б).

3. Дополнительные задачи.

Задача 1

Постройте равнобедренный треугольник по основанию и высоте, проведенной из вершины при основании.

Построение (см. рис. 4.201): Высота, проведенная из вершины прн основании равнобедренного треугольника, перпендикулярна боковой стороне, поэтому ход построения будет следующим:

1) Начертим прямую a и отметим на ней произвольную точку H.

2) Построим прямую, проходящую через точку H и перпендикулярную прямой a.

3) На прямой b от точки H отложим отрезок HA, равный высоте, проведенной из вершины при основании.

4) Построим окружность с центром в точке A и радиусом, равным основанию. Прямая a пересекается с окружностью в точке B.

5) Соединим точки A и B отрезком – это и будет основанием треугольника.

6) Построим прямую c, проходящую через середину основания AB перпендикулярно AB. На прямой c будут лежать биссектриса, медиана, высота и вершина искомого треугольника, а на прямой a – боковая сторона. Следовательно, точка пересечения прямых a и b – это и есть точка C – вершина треугольника. ΔABC – искомый.

Задача имеет два решения.

Задача 2

Постройте равнобедренный треугольник по боковой стороне и высоте, проведенной из вершины при основании.

Построение (см. рис. 4.202):

а) На прямой a отложим отрезок AB, равный боковой стороне треугольника.

б) Построим окружность с центром в точке A и радиусом, равным AB.

в) Построим прямую b, параллельную прямой a и удаленную от нее на расстояние, равное высоте, проведенной из вершины при основании.

г) Прямая b пересекается с окружностью в точке C.

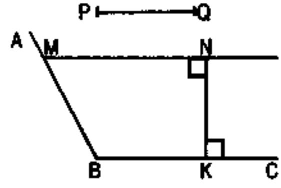


Рис. 4.203

д) $\Delta\, ABC$ – искомый, в нем $AB = BC$, а высота CD, проведенная из вершины при основании, равна расстоянию между прямыми a и b.

Задача имеет два решения.

Домашнее задание

1. Решить задачи № 290, 291 б, г, 292 а, 280.

Задача № 280

См. рис. 4.203.

Луч MN такой, что $M \in BA$, $MN \parallel BC$, $KN \perp BC$, $NK = PQ$.

Урок 58. Построение треугольника по трем элементам. Решение задач

Цель урока:

совершенствование навыков решения задач на построение, нахождение расстояния от точки до прямой и расстояния между параллельными прямыми.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Повторение. Проверка домашнего задания

1. Проверить домашнюю задачу № 280.

(Вызвать к доске одного из учащихся и предложить продемонстрировать ход построения.)

2. Устное решение задач на готовых чертежах.

(Фронтальная работа с классом, рисунки к задачам подготовить на доске заранее.)

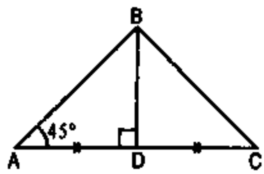


Рис. 4.204

1) Рис. 4.204.

Дано: $BC = 5$ см.

Найти: расстояние от точки B до прямой AC.

2) Рис. 4.205.

Найти: расстояние от точки C до прямой AB.

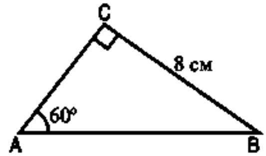


Рис. 4.205

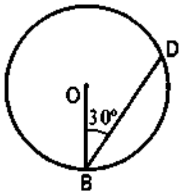


Рис. 4.206

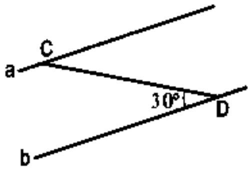


Рис. 4.207

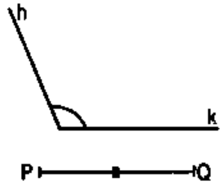


Рис. 4.208

3) Рис. 4.206.

Дано: $R = 12$ см.

Найти: расстояние от центра окружности до хорды BD.

4) Рис. 4.207.

Дано: $a \parallel b$, $CD = 6$ см.

Найти: расстояние между прямыми a и b.

3. Письменно решить задачу. (Один из учащихся по указанию учителя работает у доски, остальные в тетрадях.)

Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и внешнему углу при вершине острого угла.

Дано (см. рис. 4.208): внешний угол при вершине острого угла, гипотенуза PQ.

Построить: прямоугольный треугольник.

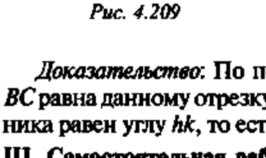


Рис. 4.209

Построение (см. рис. 4.209):

1) Проведем прямую, отметим на ней точку B и отложим отрезок BC, равный PQ.

2) Отложим от луча BD, являющегося продолжением луча BC, угол DBM, равный углу hk.

3) Построим прямую, проходящую через точку C и перпендикулярную к прямой BM, и обозначим буквой A точку пересечения этой прямой с лучом BM. ΔABC – искомый.

Доказательство: По построению ΔABC – прямоугольный, гипотенуза BC равна данному отрезку PQ, а внешний угол ABD построенного треугольника равен углу hk, то есть ΔABC удовлетворяет всем условиям задачи.

III. Самостоятельная работа

(Тетради в конце урока сдать на проверку учителю.)

I уровень

Вариант I

1. В треугольнике ABC $\angle C = 30°$, $AC = 10$ см, $BC = 8$ см. Через вершину A проведена прямая a, параллельная BC.

Найдите:

а) расстояние от точки B до прямой AC;

б) расстояние между прямыми a и BC.

2. *Постройте* равносторонний треугольник, у которого сторона в два раза меньше данного отрезка.

Вариант II

1. В треугольнике ABC $\angle A = 30°$, $AC = 12$ см, $AB = 10$ см. Через вершину C проведена прямая a, параллельная AB.

Найдите:

а) расстояние от точки B до прямой AC;

б) расстояние между прямыми a и AB.

2. *Постройте* равнобедренный треугольник, у которого боковая сторона равна данному отрезку, а основание в два раза меньше боковой стороны.

II уровень

Вариант I

1. В треугольнике MKP сторона MP равна 20 см. Расстояние от точки K до прямой MP равно 1/2 KP. Через точку M проведена прямая a, параллельная KP.

Найдите:

а) $\angle MPK$;

б) расстояние между прямыми a и KP.

2. Даны неразвернутый угол и отрезок. Постройте треугольник, у которого одна сторона в два раза больше другой и равна данному отрезку, а угол, заключенный между этими сторонами, равен данному углу.

Вариант II

1. В треугольнике MKP сторона $MP = 16$ см. Сторона KP вдвое больше расстояния от точки K до прямой MP. Через точку M проведена прямая b, параллельная KP.

Найдите:

а) $\angle KPM$;

б) расстояние между прямыми b и KP.

2. Даны два острых угла и отрезок. Постройте треугольник, у которого сторона равна половине данного отрезка, а прилежащие к ней углы – двум данным углам.

III уровень

Вариант I

1. В треугольнике ABC $\angle A = 70°$, $\angle B = 80°$, BE – биссектриса. Через точку E проведена прямая a, параллельная BC, $EC = x$.

Найдите:

а) расстояние между прямыми a и BC;

б) расстояние от точки E до прямой AB.

2. *Постройте* остроугольный равнобедренный треугольник по основанию и разности двух неравных сторон.

Вариант II

1. В треугольнике ABC $\angle A = 50°$, $\angle B = 100°$, BE – биссектриса. Через точку E проведена прямая a, параллельная BC, $EC = y$.

Найдите:

а) расстояние между прямыми a и BC;

б) расстояние от точки E до прямой AB.

2. *Постройте* равнобедренный треугольник по периметру и боковой стороне.

Домашнее задание

1. Прочитать задачу № 293.
2. Решить задачи № 294, 295, 281.

Урок 59. Решение задач на построение

Цели урока:

1) привести в систему умения и навыки решения задач на построение;
2) подготовить учащихся к контрольной работе.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Анализ самостоятельной работы

1. Сделать общий анализ самостоятельной работы.

2. Обсуждение принципов решения задач на построение (на доске подготовить условия всех шести задач на построение и заслушать учащихся, выполнявших данные задания, – только анализ, без выполнения самого построения).

3. Работа над ошибками (самостоятельно):

а) найти свои ошибки в решении задачи № 1, используя готовые ответы, рисунки к задачам и указания;

б) решить правильно задачу № 2, если она решена неверно; в случае верного решения по своему усмотрению перейти к решению задачи № 2 следующего уровня или дополнительной задачи.

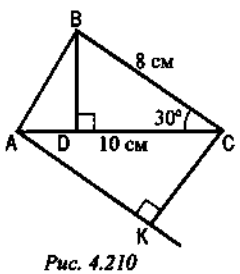


Рис. 4.210

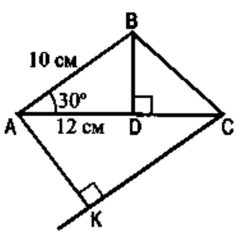


Рис. 4.211

Ответы и указания к первой задаче самостоятельной работы:

I уровень

Вариант I

См. рис. 4.210.

а) $BD = 4$ см;

б) $CK = 5$ см.

Докажите, что $\angle CAK = 30°$.

Вариант II

См. рис. 4.211.

а) $BD = 5$ см;

б) $AK = 6$ см.

Докажите, что $\angle ACK = 30°$.

II уровень

Вариант I

См. рис. 4.212.

а) $\angle MPK = 30°$, так как $KD = 1/2\ KP$;

б) $PE = 10$ см.

Докажите, что $\angle PME = 30°$.

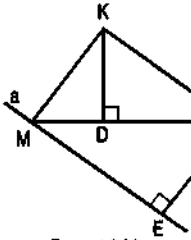


Рис. 4.212

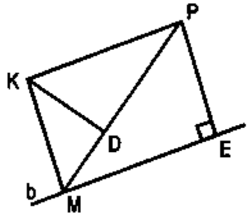


Рис. 4.213

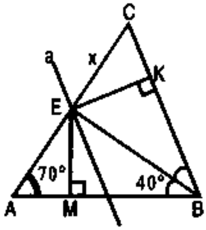


Рис. 4.214

Вариант II

См. рис. 4.213.

а) $\angle KPM = 30°$, так как $KP = 2\ KD$;

б) $PE = 8$ см.

Докажите, что $\angle PME = 30°$.

III уровень

Вариант I

См. рис. 4.214.

а) $EK = x/2$, так как $\angle C = 30°$;

б) $EM = x/2$.

Докажи, что $\Delta\ BEK = \Delta\ BEM$.

II вариант

См. рис. 4.215.

а) $EK = y/2$, так как $\angle C = 30°$;

б) $EM = y/2$.

Докажите, что $\Delta\ BEK = \Delta\ BEM$.

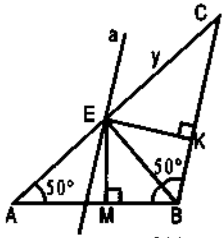


Рис. 4.215

Дополнительные задачи:

Задача 1

Дан треугольник ABC (см. рис. 4.216). ***Постройте*** треугольник MPK, в котором $MP = 2\ AB$, $\angle M = \angle A$, а высота KE равна высоте CD треугольника ABC.

Построение (см. рис. 4.217):

1) На произвольной прямой a отложим отрезок MP, равный $2\ AB$.

2) От луча MP отложим угол PMB, равный $\angle A$.

3) Построим прямую b, удаленную от прямой a на расстояние, равное CD. Прямая b пересекается с лучом MB в точке K.

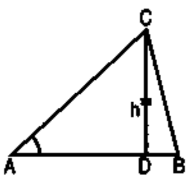


Рис. 4.216

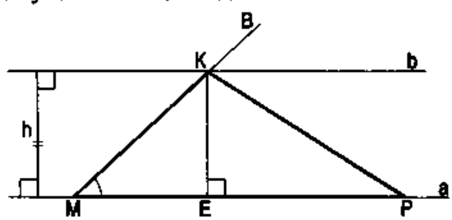


Рис. 4.217

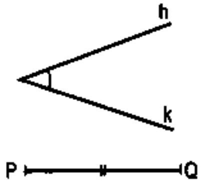


Рис. 4.218

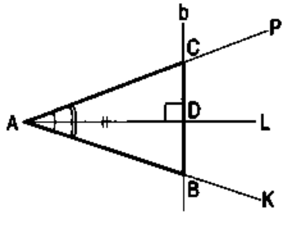


Рис. 4.219

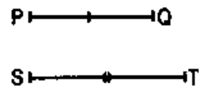


Рис. 4.220

4) Соединим точки K и P отрезком. Δ MPK – искомый.

Доказательство: В Δ MPK $MP = 2AB$, $\angle M = \angle A$, $CD = KE$.

Задача 2

Постройте равнобедренный треугольник по биссектрисе, проведенной к основанию, и углу, противолежащему основанию (рис. 4.218).

Построение (см. рис. 4.219):

1) Построим $\angle PAK = \angle (hk)$ и проведем его биссектрису AL.

2) На луче AL от точки A отложим отрезок AD, равный PQ.

3) Построим прямую b, перпендикулярную прямой AL и проходящую через точку D (так как биссектриса, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, является его высотой).

4) $b \cap AP = C$, $b \cap AK = B$. Δ ABC – искомый.

Доказательство: Δ ABC – равнобедренный, так как $AB = AC$ из равенства прямоугольных треугольников ABD и ACD по катету и прилежащему к нему острому углу.

Биссектриса, проведенная к основанию, равна PQ, а угол, противолежащий основанию, равен $\angle (hk)$.

Задача 3

Постройте прямоугольный треугольник по катету и медиане, проведенной к другому катету.

Дано (см. рис. 4.220): катет PQ; медиана ST, проведенная к другому катету.

Построение (рис. 4.221):

1) Построим прямую a и прямую b, перпендикулярную ей и проходящую через произвольную точку C прямой a ($\angle C = 90°$).

2) На прямой a от точки C отложим отрезок CB, равный PQ.

3) Построим окружность с центром в точке B и радиусом, равным ST. Окружность пересекается с прямой b в точке M. BM – медиана искомого треугольника.

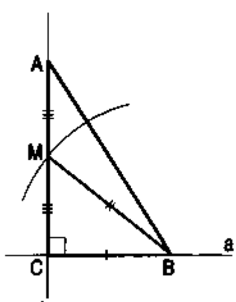


Рис. 4.221

4) На прямой b отложим отрезок CA, равный 2 см.

5) Соединим точки A и B отрезком. Δ ABC – искомый.

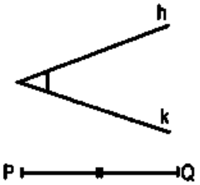


Рис. 4.222

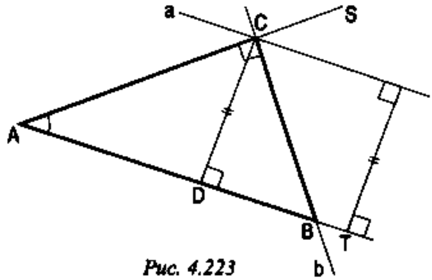


Рис. 4.223

Доказательство: ΔABC – прямоугольный, в нем $\angle C = 90°$ по построению, катет BC равен PQ, медиана BM равна ST (M – середина AC, так как $AM = MC$).

Задача 4

Постройте прямоугольный треугольник по острому углу и высоте, проведенной из вершины прямого угла.

Дано (рис. 4.222): $\angle(hk)$ – острый угол, PQ – высота, проведенная из вершины прямого угла.

Построение (рис. 4.223):

1) Построим $\angle SAT = \angle(hk)$.

2) Построим прямую a, удаленную от прямой AT на расстояние, равное PQ, $a \cap AS = C$.

3) Построим прямую b, перпендикулярную прямой AS и проходящую через точку C. $b \cap AT = B$. ΔABC – искомый.

Доказательство: ΔABC – прямоугольный ($\angle C = 90°$ по построению), в нем $\angle A = \angle(hk)$, а высота $CD = PQ$.

Задача 5

Постройте остроугольный треугольник по высоте и двум острым углам, которые эта высота образует со сторонами треугольника.

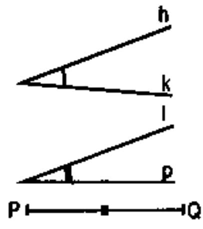


Рис. 4.224

Дано (рис. 4.224): $\angle(hk)$ и $\angle(lp)$ – острые углы, которые образует высота со сторонами треугольника, PQ – высота треугольника.

Построение (рис. 4.225):

1) На прямой a отложить отрезок AH, равный PQ.

2) От луча AH по разные стороны от него построить $\angle HAM = \angle(hk)$ и $\angle HAN = \angle(lp)$.

3) Провести прямую b, перпендикулярную прямой a и проходящую через точку H.

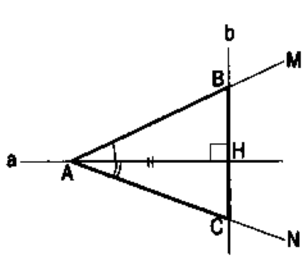


Рис. 4.225

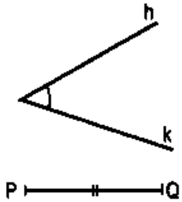


Рис. 4.226

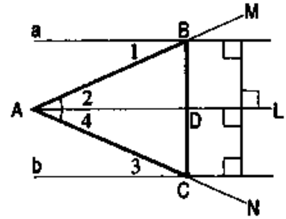


Рис. 4.227

4) $b \cap AM = B$, $b \cap AN = C$. ΔABC – искомый.

Доказательство: В ΔABC AH – высота по построению ($a \perp b$) и $AH = PQ$. Острые углы, которые образует высота AH со сторонами AB и AC треугольника ABC, равны $\angle(hk)$ и $\angle(pl)$ соответственно.

Задача 6

Постройте равнобедренный треугольник по основанию и углу, противолежащему этому основанию.

Дано (рис. 4.226): $\angle(hk)$ – угол, противолежащий основанию; PQ – основание.

Построение (рис. 4. 227):

1) Построим $\angle MAN = \angle(hk)$.

2) Построим биссектрису AL угла MAN.

3) Построим прямые a и b, удаленные от прямой AL на расстояние, равное $1/2\ PQ$, и расположенные по разные стороны от нее.

4) $AM \cap a = B$, $AN \cap b = C$. Соединим точки B и C отрезком. ΔABC – искомый.

Доказательство: $a \parallel AL$, тогда $\angle 1 = \angle 2$; $b \parallel AL$, тогда $\angle 3 = \angle 4$. Так как $\angle 2 = \angle 4$, то $\angle 1 = \angle 3$, а $\angle ABC = \angle ACB$, отсюда ΔABC – равнобедренный.

$\angle BAC = \angle(hk)$ по построению, $BC = PQ$, так как $a \parallel b$, а прямые a и b удалены на расстояние, равное PQ.

Домашнее задание

I уровень – решить задачи № 315 (а, б, в), 314.

II уровень – решить задачи № 315 (а, г, е), 317.

Урок 60. Решение задач. Подготовка к контрольной работе

Цели урока:

1) закрепить знания, умения, навыки по темам «Прямоугольные треугольники» и «Расстояние от точки до прямой. Расстояние между параллельными прямыми»;
2) подготовить учащихся к предстоящей контрольной работе.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Проверка домашнего задания. Повторение

1. Проверить решение домашних задач № 315, 317.

(Решения задач попросить двух учащихся подготовить на доске до начала урока.)

Задача № 315

Решить задачу полуустно (объяснить принцип построения с помощью схематических рисунков).

Построение:

1) Построить прямоугольный треугольник, в котором один из катетов в два раза меньше гипотенузы.

2) То же, что и в 1).

3) Построить угол в 30° и провести его биссектрису.

4) Построить угол в 60° (см. 2) и угол, смежный с ним.

5) Построить угол в 90° и его биссектрису. Далее построить угол, равный сумме углов в 90° и в 45°.

Задача № 317

Построение (см. рис. 4.228):

1) Построить биссектрисы углов BAC и BCA. K – точка пересечения биссектрис.

2) Через точку K провести прямую, параллельную прямой AC, которая пересекает AB и BC в двух точках, D и E.

Отрезок DE – искомый.

Доказательство: ΔADK – равнобедренный, так как $\angle 1 = \angle 2$ (AK – биссектриса), $\angle 2 = \angle 3$ ($AC \parallel DK$), тогда $\angle 1 = \angle 3$, $AD = DK$.

$\angle 4 = \angle 5$ (CK – биссектриса), $\angle 4 = \angle 6$ ($AC \parallel DK$), тогда $\angle 5 = \angle 6$, ΔKEC – равнобедренный, $KE = EC$.

$DE = DK + KE = AD + EC$.

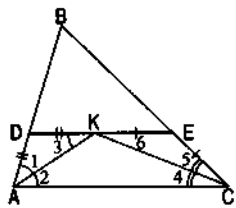


Рис. 4.228

2. Решение задач на готовых чертежах на повторение свойств прямоугольных треугольников, признаков равенства прямоугольных треугольников, расстояния между параллельными прямыми и расстояния от точки до прямой – самостоятельно с последующей проверкой (в тетрадях записать только ответы задач, рисунки к задачам и их условия подготовить заранее на доске или раздать на каждую парту).

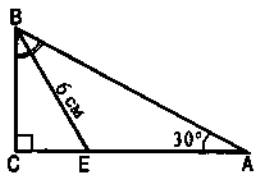


Рис. 4.229

1) Рис. 4.229.

Найти: $\angle BEA$, CE, AC.

(*Ответ*: $\angle BEA = 120°$, $CE = 3$ см, $AC = 9$ см.)

2) Рис. 4.230.

Найти: AD, AB.

(*Ответ*: $AD = 4$ см, $AB = 8$ см.)

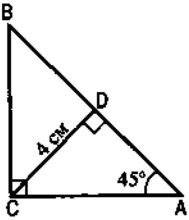


Рис. 4.230

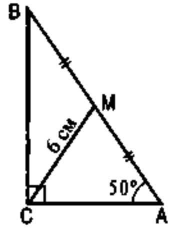


Рис. 4.231

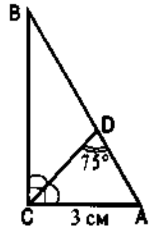


Рис. 4.232

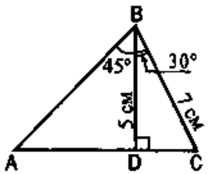


Рис. 4.233

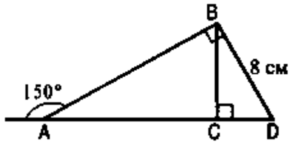


Рис. 4.234

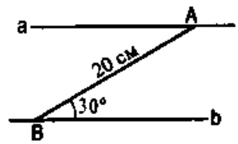


Рис. 4.235

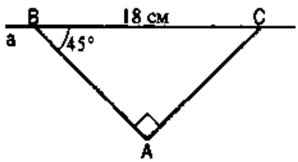


Рис. 4.236

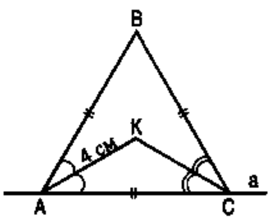


Рис. 4.237

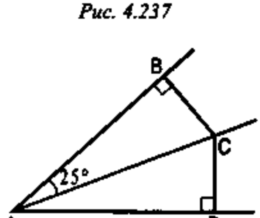


Рис. 4.238

3) Рис. 4.231.

Найти: AB, $\angle BCM$, $\angle AMC$.

(*Ответ*: $AB = 12$ см, $\angle BCM = 40°$, $\angle AMC = 80°$.)

4) Рис. 4.232.

Найти: $\angle A$, AB.

(*Ответ*: $\angle A = 60°$, $AB = 6$ см.)

5) Рис. 4.233.

Найти: AC.

(*Ответ*: $AC = 8{,}5$ см.)

6) Рис. 4.234.

Найти: DC, AC.

(*Ответ*: $DC = 4$ см, $AC = 12$ см.)

7) Рис. 2.235.

Дано: $a \parallel b$.

Найти: расстояние между прямыми a и b.

(*Ответ*: 10 см.)

8) Рис. 4.236.

Найти: расстояние от точки A до прямой a.

(*Ответ*: 9 см.)

9) Рис. 4.237.

Найти: расстояние от точки K до прямой a.

(*Ответ*: 2 см.)

10) Рис. 4.238.

Укажите равные треугольники.

Найти: $\angle BCD$.

(*Ответ*: $\Delta ABC = \Delta ADC$, $\angle BCD = 130°$.)

11) Рис. 4.239.

Укажите равные треугольники.

Найти: $\angle EAD$, $\angle AED$.

(*Ответ*: $\Delta ABD = \Delta DCA$, $\angle AED = 110°$, $\angle EAD = 35°$.)

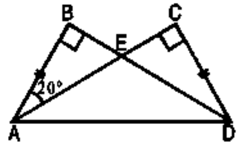


Рис. 4.239

12) Рис. 4.240.

Укажите равные треугольники.

Найти: AB.

(*Ответ*: $\Delta ABM = \Delta CBM$, $AB = 6$ см.)

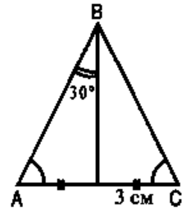


Рис. 4.240

13) Рис. 4.241.

Дано: CL – биссектриса.

Найти: $\angle A$, $\angle B$.

(*Ответ*: $\angle A = 25°$, $\angle B = 65°$.)

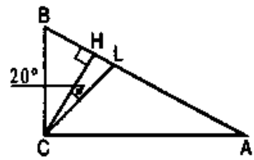


Рис. 4.241

14) Рис. 4.242.

Дано: CM – медиана.

Найти: $\angle A$, $\angle B$.

(*Ответ*: $\angle A = 35°$, $\angle B = 55°$.)

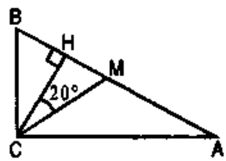


Рис. 4.242

15) Рис. 4.243.

Дано: $\angle 1 : \angle 2 = 2 : 3$.

Найти: $\angle A$, $\angle C$.

(*Ответ*: $\angle A = 72°$, $\angle B = 18°$.)

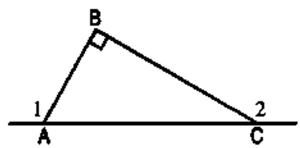


Рис. 4.243

3. Проверка ответов к задачам на готовых чертежах.

Учащимся, более подготовленным, чем остальные, предложить проверить задачи самостоятельно по готовым ответам, исправить ошибки, а затем перейти к решению дополнительных задач.

При проверке задач наиболее слабо успевающим учащимся можно задавать, например, такие вопросы:

– Объясните, почему $\angle BEA = 120°$, $CE = 3$ см, $AC = 9$ см? Определите вид ΔBCE, ΔBAE. Почему, если $AC = 9$ см, $CE = 3$ см, то $AE = 6$ см?
– Почему $AD = 4$ см? Что вы можете сказать о ΔCDA? Докажите, что $AD = BD$.

И так далее. Для большинства учащихся этих задач хватит на всю оставшуюся часть урока, а тем, кто успешно их решит, можно предложить дополнительные задачи.

III. Решение дополнительных задач

Задача 1

На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC взята точка E, а внутри треугольника – точка D. Перпендикуляр EM к прямой AC делит катет AC пополам, $\angle B = 45°$, $\angle CDA = 90°$, $\angle DCA = 60°$. Докажите, что $EM = DC$.

Задача 2

В треугольнике ABC высоты AA_1 и CC_1 равны, $AC_1 = BA_1$. Найдите угол B.

Задача 3

Из точки A к некоторой прямой проведены наклонные AB и AC и перпендикуляр AD так, что точка C является серединой отрезка BD. Может ли выполняться неравенство $AB > 2\,AC$?

Домашнее задание

Решить задачи № 308, 309, 315 (ж), (з), (и).

Урок 61. Контрольная работа №5 по теме «Прямоугольный треугольник. Построение треугольника по трем элементам» (см. Приложение 1)

Урок 62. Работа над ошибками

Цели урока:

1) совершенствование навыков решения задач;
2) устранение пробелов в знаниях учащихся;
3) развитие навыков самопроверки выполненных работ, умения находить свои ошибки.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Общий анализ контрольной работы

1. Общее впечатление о выполненной работе.

2. Решение (или обсуждение) задач, с которыми не справились большинство учащихся.

3. Демонстрация лучших работ.

III. Работа над ошибками

1. Найти свои ошибки в решениях задач и устранить их, используя готовые ответы и указания.

2. Решить задачи одного из вариантов следующего уровня. Если ученик выполнял контрольную работу III уровня, решить дополнительные задачи.

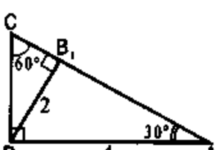


Рис. 4.246

Ответы и указания к задачам контрольной работы

I уровень

Вариант I

1. $\angle ADB = \angle CBD = 15°$, значит, $AD \parallel BC$.
2. Рис. 4.246.
$AB = 4$ см.

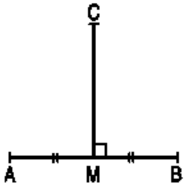


Рис. 4.247

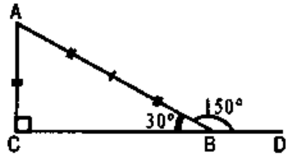


Рис. 4.248

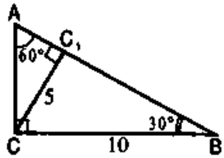


Рис. 4.249

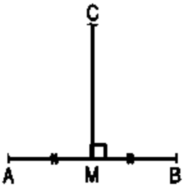


Рис. 4.250

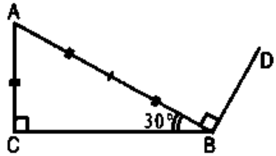


Рис. 4.251

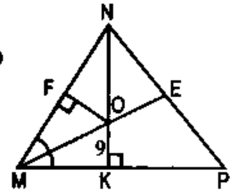


Рис. 4.252

3. Рис. 4.247.

AB – основание, *MC* – высота и медиана, $AM = MB$, $MC \perp AB$.

Постройте ΔABC.

4*. Рис. 4.248.

Постройте прямоугольный ΔABC, в котором $AB = 2\,AC$, тогда $\angle B = 30°$, а $\angle ABD = 150°$.

Вариант II

1. $\angle OAD = \angle OBC = 70°$, значит, $AD \parallel BC$.

2. Рис. 4.249.

$\angle CAB = 60°$.

3. Рис. 4.250.

AB – основание, *MC* – медиана и высота, $MC \perp AB$, $AM = MB$.

Постройте ΔABC.

4*. Рис. 4.251.

Постройте прямоугольный ΔABC, в котором $AB = 2\,AC$, тогда $\angle B = 30°$. $BD \perp AB$, тогда $\angle CBD = 120°$.

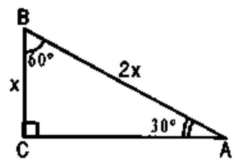


Рис. 4.253

II уровень

Вариант I

1. Рис. 4.252.

Докажи, что $\Delta MOF = \Delta MOK$, тогда $OF = 9$ см.

2. Рис. 4.253.

$x + 2x = 42$ см, $AB = 28$ см.

3. Рис. 4.254.

AB – гипотенуза, $\angle A$ – данный острый угол.

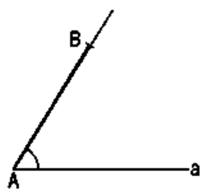


Рис. 4.254

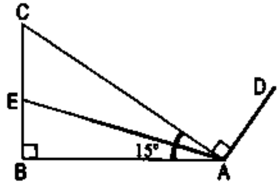


Рис. 4.255

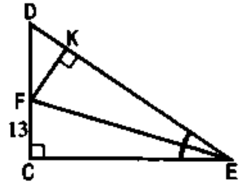


Рис. 4.256

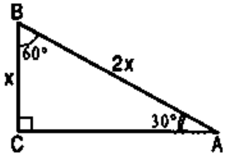


Рис. 4.257

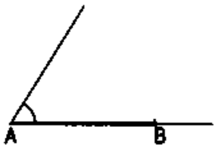


Рис. 4.258

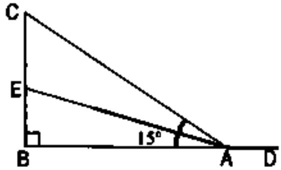


Рис. 4.259

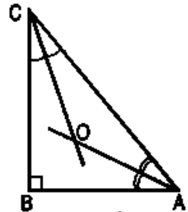


Рис. 4.260

Построй прямую, перпендикулярную прямой a и проходящую через точку B.

4*. Рис. 4.255.

$AC = 2\ CB$, тогда $\angle CAB = 30^\circ$, $\angle EAD = 15^\circ + 90^\circ = 105^\circ$.

Вариант II

1. Рис. 4.256.

Докажи, что $\Delta\ CEF = \Delta\ KEF$, тогда $FK = 13$ см.

2. Рис. 4.257.

$2x - x = 15$ см, $AB = 30$ см.

3. Рис. 4.258.

AB – катет, $\angle A$ – прилежащий к нему острый угол.

Построй прямую, перпендикулярную AB и проходящую через точку B.

4*. Рис. 4.259.

$AC = 2\ CB$, тогда $\angle CAB = 30^\circ$, $\angle EAD = 180^\circ - 15^\circ = 165^\circ$.

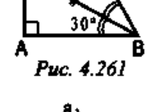


Рис. 4.261

III уровень

Вариант I

1. Рис. 4.260.

$\angle A + \angle C = 90^\circ$. $1/2\ \angle A + 1/2\ \angle C = 45^\circ$.

$\angle AOC = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

2. Рис. 4.261.

$BD = DC = 8$ см, $AC = 12$ см, $DK = 4$ см.

3. Рис. 4.262.

BH – высота, BC – катет, a – прямая, на которой лежит гипотенуза. Построй второй катет и гипотенузу.

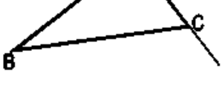


Рис. 4.262

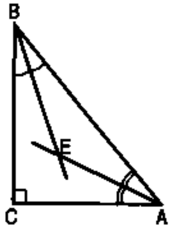


Рис. 4.263

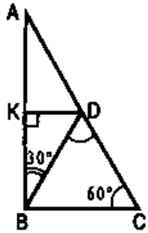


Рис. 4.264

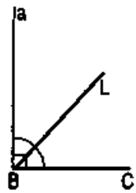


Рис. 4.265

4*. $67°30' = 3/4$ прямого угла. $90° : 4 \cdot 3 = 67°30'$.

Вариант II

1. Рис. 4.263.

$\angle A + \angle B = 90°$. $1/2\ \angle A + 1/2\ \angle B = 45°$.

$\angle AEB = 180° - 45° = 135°$.

2. Рис. 4.264.

$\Delta\ BDC$ – равносторонний, тогда $\Delta\ ABD$ – равнобедренный, $BD = AD = 5$ см, $AC = 10$ см, $DK = 2{,}5$ см.

3. Рис. 4.265.

BC – катет, BL – биссектриса прямого угла, a – прямая, на которой лежит второй катет ($a \perp BC$). Построй гипотенузу и второй катет.

4*. $112°30' = 90° + 22°30'$, $22°30' = 1/4$ прямого угла.

Дополнительные задачи:

Задача 1

Через точку K, взятую на стороне AB треугольника ABC, проведена прямая, перпендикулярная AB и пересекающая сторону AC в точке D. Известно, что $\angle KDB = \angle KDA$, $AC = 30$ см, $BC = 15$ см.

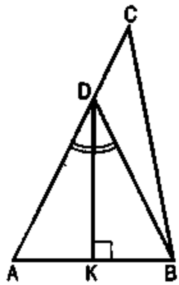


Рис. 4.266

Найдите периметр треугольника BDC.

Решение (см. рис. 4.266): $\Delta\ ADK = \Delta\ BDK$ по катету и прилежащему к нему острому углу, тогда $AD = BD$.

$P_{BDC} = BD + DC + CB = (AD + DC) + CB = AC + CB = 30$ см $+ 15$ см $= 45$ см. (*Ответ*: $P_{BDC} = 45$ см.)

Задача 2

Докажите, что биссектриса угла A треугольника ABC проходит через точку пересечения прямых, содержащих биссектрисы внешних углов при вершинах B и C.

Доказательство (см. рис. 4.267): BO и CO – биссектрисы $\angle MBC$ и $\angle PCB$ соответственно.

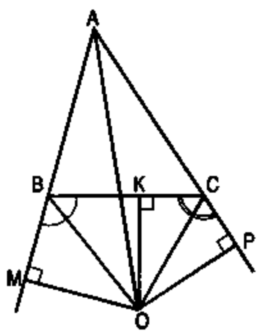


Рис. 4.267

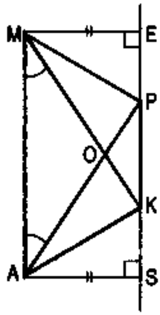


Рис. 4.268

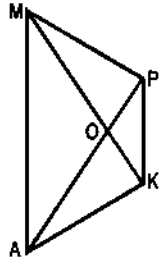


Рис. 4.269

Докажем, что AO – биссектриса $\angle BAC$. Проведем $OM \perp AB$, $OK \perp \perp BC$, $OP \perp AC$, тогда $\Delta BOM = \Delta BOK$, $\Delta COK = \Delta COP$ по гипотенузе и острому углу. Следовательно, $OM = OK = OP$.

$\Delta AOM = \Delta AOP$ по катету и гипотенузе, отсюда $\angle MAO = \angle PAO$, то есть AO – биссектриса $\angle BAC$.

Задача 3

Рис. 4.268.

Дано: точки M и T равноудалены от прямой PK, $\angle KMT = \angle PTM$.

Доказать: $\Delta PMK = \Delta PKT$.

Доказательство (см. рис. 4.269): $\angle KMT = \angle PTM$, тогда $\angle EMK = = \angle STP$, значит, $\Delta EMK = \Delta STP$ по катету и прилежащему к нему острому углу, следовательно, $\angle MKP = \angle TPK$, а $MK = TP$.

$\Delta PMK = \Delta KTP$ по двум сторонам и углу между ними.

Домашнее задание

Повторить главу I, вопросы 1–21.

ГЛАВА V

ПОВТОРЕНИЕ
(уроки 63–68)

Основная цель – систематизация знаний и умений, навыков учащихся, приобретенных в процессе изучения тем курса геометрии VII класса.

Основное внимание на этих уроках следует уделить формированию у учащихся умения применять приобретенные знания, умения, навыки в комплексе, решению задач повышенной сложности с одаренными учащимися.

Повторение курса геометрии VII класса организовано следующим образом:

Урок 63. «Измерение отрезков и углов. Длина отрезка и ее свойства. Величина угла и ее свойства. Смежные и вертикальные углы. Перпендикулярные прямые».

Урок 64. «Треугольник. Признаки равенства треугольников. Перпендикуляр к прямой. Медианы, биссектрисы и высоты треугольника. Равнобедренный, равносторонний треугольник и их свойства».

Урок 65. «Признаки параллельности прямых. Аксиома параллельных прямых. Свойства параллельных прямых».

Урок 66. «Сумма углов треугольника. Соотношения между сторонами и углами треугольника. Неравенство треугольника. Прямоугольный треугольник и его свойства. Признаки равенства прямоугольных треугольников. Расстояние от точки до прямой. Расстояние между параллельными прямыми».

Урок 67. «Основные задачи на построение с помощью циркуля и линейки. Построение треугольника по трем элементам. Более сложные задачи на построение».

Урок 68. «Итоговая контрольная работа или итоговый контрольный тест».

На повторение отведено 6 часов.

Урок 63. Повторение темы «Начальные геометрические сведения»

Цели урока:

1) привести в систему знания, умения, навыки учащихся по теме;
2) совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Игра (проверка теоретических знаний)

Оборудование:

доска; мел; карточки с вопросами для повторения к первой главе (стр. 25–26) – всего 21 вопрос по одному на карточку.

Условия игры:

1. Класс делится на три команды (I, II, III ряд), выбирается капитан команды и ее учетчики.

2. Перед тем, как вытянуть одну из приготовленных карточек, капитан команды называет фамилию и имя члена команды, который будет отвечать. При этом отвечающие каждый раз должны быть разными.

3. Если назначенный ученик дал верный ответ на вопрос – команда получает 2 балла, если нет – на помощь приходит команда, но в этом случае команде начисляется только 1 балл. Если команда не смогла ответить, отвечает та команда, которая первая изъявила желанне, и получает 1 балл.

4. Карточки капитаны команд вытягивают друг за другом по очереди, учетчики ведут учет общего количества баллов, заработанных каждым членом команды.

5. Количество баллов, заработанных каждой командой, учитывается на доске и подсчитывается учителем.

6. Команде-победителю дается право поставить членам своей команды две «пятерки» и две «четверки» в зависимости от количества баллов, набранных учащимися; команде, занявшей второе место – одну «пятерку» и одну «четверку»; команде, занявшей третье место – две «четверки».

III. Решение задач по готовым чертежам (самостоятельная работа)

1. Ко всем задачам написать ответы в тетрадях, рассуждения можно вести устно или на черновике.

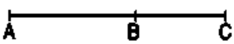


Рис. 5.1

Задача 1

Рис. 5.1.

Дано: $AB : BC = 4 : 3$, $AC = 21$ см.

Найти: AB, BC.

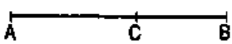


Рис. 5.2

Задача 2

Рис. 5.2.

Дано: CB на 3 см меньше, чем AC; $AB = 15$ см.

Найти: AC, CB.

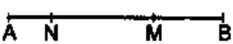


Рис. 5.3

Задача 3

Рис. 5.3.

Дано: $AB = 12$ см, $AM = 8$ см, $BN = 10$ см.

Найти: MN.

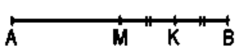


Рис. 5.4

Задача 4

Рис. 5.4.

Дано: M – середина AB, $AB = 20$ см.

Найти: AK.

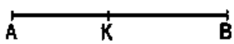


Рис. 5.5

Задача 5

Рис. 5.5.

Дано: $1/3\ AK = 1/4\ BK$, $AB = 14$ см.

Найти: ***AK***, ***BK***.

Задача 6

Рис. 5.6.

Дано: ***AB*** = 30 см.

Найти: ***CE***.

Задача 7

Рис. 5.7.

Дано: $\angle AOB = 125^\circ$, $\angle AOD = 31^\circ$, $\angle COB = 42^\circ$.

Найти: $\angle DOC$.

Задача 8

Рис. 5.8.

Дано: $\angle AOC$ в два раза больше $\angle BOC$, $\angle AOB = 120^\circ$.

Найти: $\angle AOC$, $\angle BOC$.

Задача 9

Рис. 5.9.

Дано: $\angle BOC = 63^\circ$, $\angle AOD = 57^\circ$, $\angle AOB = 85^\circ$.

Найти: $\angle DOC$.

Задача 10

Рис. 5.10.

Дано: $\angle BOC - \angle AOC = 18^\circ$, $\angle AOB = 70^\circ$.

Найти: $\angle AOC$, $\angle BOC$.

Задача 11

Рис. 5.11.

Дано: $\angle AOE = 116^\circ$.

Найти: $\angle BOD$.

Задача 12

Рис. 5.12.

Дано: $\angle 1 : \angle 2 = 4 : 5$.

Найти: $\angle 1$, $\angle 2$.

Задача 13

Рис. 5.13.

Дано: $\angle 1 = 0{,}8 \cdot \angle 2$.

Найти: $\angle 1$, $\angle 2$.

Задача 14

Рис. 5.14.

Найти: $\angle 1$, $\angle 2$.

Задача 15

Рис. 5.15.

Найти: $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$.

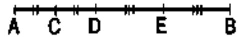


Рис. 5.6

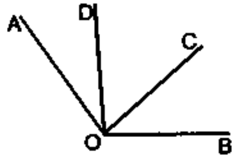


Рис. 5.7

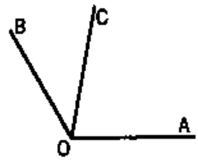


Рис. 5.8

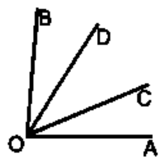


Рис. 5.9

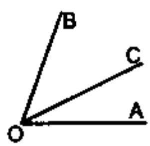


Рис. 5.10

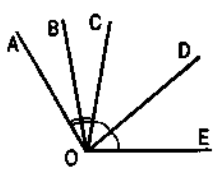


Рис. 5.11

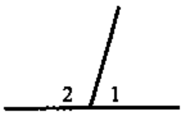


Рис. 5.12

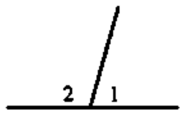


Рис. 5.13

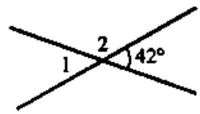


Рис. 5.14

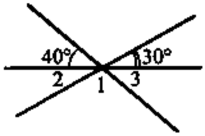


Рис. 5.15

Задача 16
Рис. 5.16.
Дано: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 230°$.
Найти: $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$.

Задача 17
Рис. 5.17.
Дано: $\angle 1 + \angle 2$ на 60° меньше, чем $\angle 3$.
Найти: $\angle 1$, $\angle 3$.

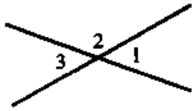


Рис. 5.16

Задача 18
Дано: *A*, *B*, *C* лежат на одной прямой, $AB = 10{,}8$ см, $BC = 2{,}4$ см.
Найти: *AC*.

Задача 19
Дано: $\angle AOB = 46°$, $\angle BOC = 85°$.
Найти: $\angle AOC$.

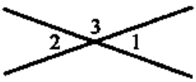


Рис. 5.17

Задача 20
Рис. 5.18.
Дано: $\angle 2 - \angle 1 = 38°$.
Найти: $\angle 3$, $\angle 4$.

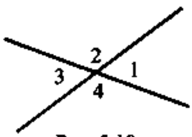


Рис. 5.18

Задача 21
Рис. 5.19.
Дано: $AB = 5$ см, $AM^2 - MB^2 = 5$.
Найти: *AM*, *BM*.

Рис. 5.19

IV. Самопроверка решений задач по готовым ответам

Ответы к задачам для самопроверки:

1. $AB = 16$ см, $BC = 9$ см.
2. $AC = 9$ см, $BC = 6$ см.
3. $MN = 6$ см.
4. $AK = 15$ см.
5. $AK = 6$ см, $BK = 8$ см.
6. $CE = 15$ см.
7. $\angle DOC = 52°$.
8. $\angle AOC = 80°$, $\angle BOC = 40°$.
9. $\angle DOC = 35°$.
10. $\angle AOC = 26°$, $\angle BOC = 44°$.
11. $\angle BOD = 58°$.
12. $\angle 1 = 80°$, $\angle 2 = 100°$.
13. $\angle 1 = 80°$, $\angle 2 = 100°$.
14. $\angle 1 = 42°$, $\angle 2 = 138°$.
15. $\angle 1 = 110°$, $\angle 2 = 30°$, $\angle 3 = 40°$.
16. $\angle 1 = 50°$, $\angle 2 = 130°$, $\angle 3 = 50°$.
17. $\angle 1 = 40°$, $\angle 3 = 140°$.
18. $AC = 13{,}2$ см или $AC = 8{,}4$ см.
19. $\angle AOC = 131°$ или $\angle AOC = 39°$.

20. $\angle 3 = 71°$, $\angle 4 = 109°$.
21. $AM = 3$ см, $BM = 2$ см.

Домашнее задание

Повторить главу II (§1, §2, §3 без доказательств), вопросы 1–15.
I уровень: написать подробное решение к задачам № 3, 10, 16, 20.
II уровень: решить задачи № 324, 325, 327.

Урок 64. Повторение темы «Признаки равенства треугольников. Равнобедренный треугольник»

Цели урока:

1) систематизировать знания, умения, навыки учащихся по данной теме;
2) совершенствовать навыки решения задач по теме «Признаки равенства треугольников. Равнобедренный треугольник».

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

***I уровень** – теоретический тест*
с последующим обсуждением ответов (самостоятельно)

Учитель по своему усмотрению может раздать на каждую парту обобщающие таблицы №1.

1. Рис. 5.20.
Для доказательства равенства $\Delta\ ABC$ и $\Delta\ DEF$ достаточно доказать, что:
а) $AB = DF$; б) $AC = DE$; в) $AB = DE$.
2. Рис. 5.21.
Для доказательства равенства $\Delta\ ABC$ и $\Delta\ EDF$ достаточно доказать, что:
а) $\angle A = \angle D$; б) $\angle B = \angle D$; в) $\angle A = \angle E$.
3. Рис. 5.22.
Из равенства $\Delta\ ABC$ и $\Delta\ FDE$ следует, что:
а) $AB = FD$; б) $AC = DF$; в) $AB = EF$.
4. Рис. 5.23.
Из равенства $\Delta\ ABC$ и $\Delta\ DEF$ следует, что:
а) $\angle B = \angle D$; б) $\angle A = \angle E$; в) $\angle C = \angle F$.

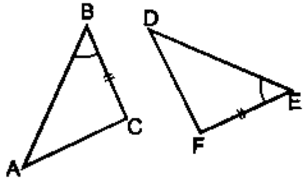


Рис. 5.20

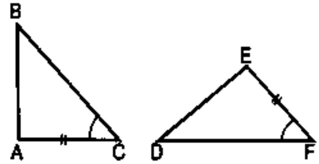


Рис. 5.21

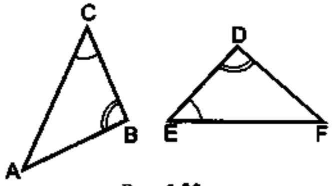


Рис. 5.22

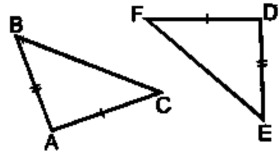


Рис. 5.23

5. В ΔABC все стороны равны, и в ΔDEF все стороны равны. Чтобы доказать равенство ΔABC и ΔDEF, достаточно доказать, что:

а) $\angle B = \angle D$; б) $AB = DE$; в) $P_{ABC} = P_{DEF}$.

6. «Медиана в равнобедренном треугольнике является биссектрисой и высотой». Это утверждение:

а) всегда верно;

б) всегда неверно;

в) может быть верно.

7. В каком треугольнике только одна его высота делит треугольник на два равных треугольника?

а) в любом;

б) в равнобедренном;

в) в равностороннем.

8. Если в треугольнике два угла равны, то этот треугольник:

а) равнобедренный;

б) равносторонний;

в) прямоугольный.

9. Если треугольник равносторонний, то:

а) он равнобедренный;

б) все его углы равны;

в) любая его биссектриса является его медианой и высотой.

II уровень – обсуждение домашних задач № 324, 325, 327.

Задача № 324

Решение: Прибавим $\angle hk$ к обеим частям равенства $\angle hk + \angle hl = 180°$, тогда $2\angle hk + \angle hl = 180° + \angle hk$, $2\angle hk = 180° - \angle hl + \angle hk$, $\angle hk = 90° - 1/2\,(\angle hl - \angle hk)$.

Если прибавить к обеим частям равенства $\angle hk + \angle hl = 180°$ еще $\angle hl$, то получим $\angle hl = 90° + 1/2\,(\angle hl - \angle hk)$.

Задача № 325

Решение: Сумма пяти данных углов равна сумме пяти равных им вертикальных углов. Сумма всех десяти углов равна 360°, поэтому сумма пяти углов равна 180°.

Задача № 327

Доказательство (см. рис. 5.24): Предположим, что не все точки лежат на одной прямой. Пусть какие-то три данные точки A_1, A_2, A_3 не лежат на одной прямой; пусть $A_1A_2 = a$, $A_1A_3 = b$, $A_2A_3 = c$.

По условию задачи на прямых a, b, c лежит еще по одной данной точке, пусть это соответственно точки A_4, A_5, A_6. Все эти шесть точек различны, поэтому никакая другая точка данной уже не является.

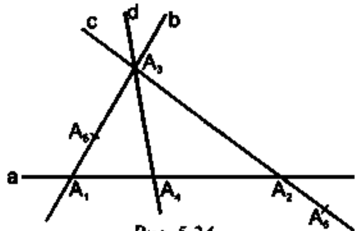


Рис. 5.24

На прямой $d = A_3A_4$ лежат только две точки, что противоречит условию. Следовательно, A_1, A_2, A_3 лежат на одной прямой, аналогично на ней лежит и каждая из остальных точек.

Далее проводится проверка ответов теста с их обсуждением. В этом виде работы участвует весь класс.

Ответы к тесту:

1 в); 2 в); 3 а); 4 в); 5 б), в); 6 в); 7 б); 8 а); 9 а), б), в).

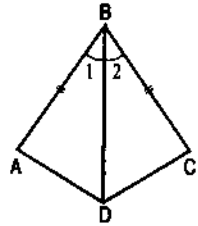


Рис. 5.25

III. Решение задач

Запишите кратко решение задач 1–6:

1. Рис. 5.25.
Доказать: DB – биссектриса $\angle ADC$.
2. Рис. 5.26.
Доказать: O – середина AB.
3. Рис. 5.27.
Дано: C – середина AE, $BC + CD = 10$ см.
Найти: BC.
4. Рис. 5.28.
Доказать: $BC = DC$.
5. Рис. 5.29.
Доказать: $BE = AC$, $ED = DC$.
6. Рис. 5.30.
Дано: $\Delta ABE = \Delta CDF$.
Доказать: $\Delta ABC = \Delta CDA$, $\Delta BEC = \Delta DFA$.

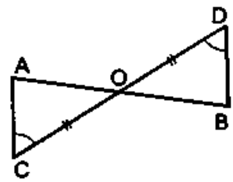


Рис. 5.26

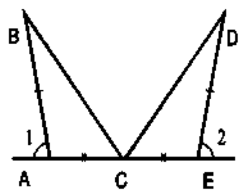


Рис. 5.27

Запишите только ответы в задачах 7–12.

7. *Дано*: ΔABC – равнобедренный, $AB + BC = 26$ см, $P_{ABC} = 36$ см.
Найти: AB, BC, AC.

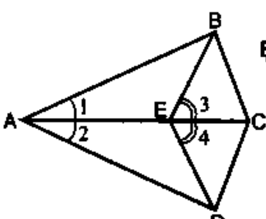


Рис. 5.28

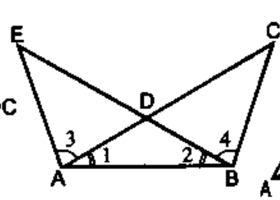


Рис. 5.29

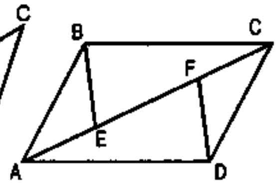


Рис. 5.30

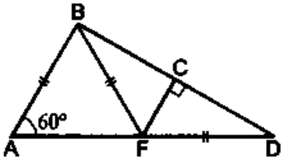


Рис. 5.31

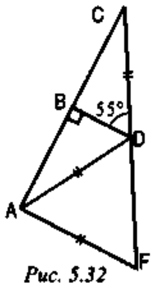


Рис. 5.32

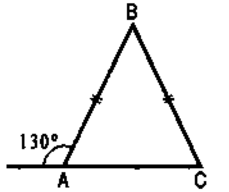


Рис. 5.33

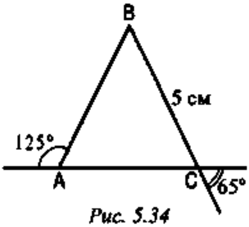


Рис. 5.34

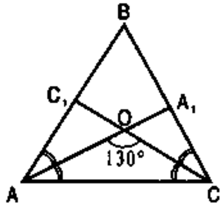


Рис. 5.35

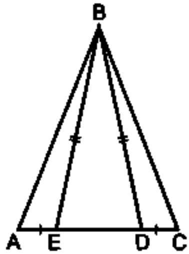


Рис. 5.36

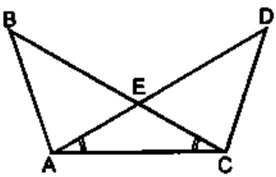


Рис. 5.37

8. Рис. 5.31.
Найти: $\angle BFC$.
9. Рис. 5.32.
Найти: $\angle AFD$.
10. Рис. 5.33.
Найти: $\angle BAC$.
11. Рис. 5.34.
Найти: *AB*.

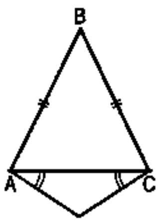


Рис. 5.38

12. Рис. 5.35.
Найти: $\angle ABC$, $\angle AA_1B$.
Запишите подробно решение задач 13–15.
13. Рис. 5.36.
Доказать: ΔABC – равнобедренный.
14. Рис. 5.37.
Дано: $BC = AD$.
Доказать: $AB = CD$.
15. Рис. 5.38.
Доказать: $BD \perp AC$.

Домашнее задание

Повторить главу III, вопросы 1–15.

Не все учащиеся на уроке успеют решить все задачи, поэтому дома нужно продолжить решение задач.

Дополнительные задачи: № 328–332 на выбор учащихся.

Урок 65. Повторение темы «Параллельные прямые»

Цели урока:

1) привести в систему знания, умения, навыки по теме «Параллельные прямые»;
2) совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

1. Тест на проверку теоретических знаний (самостоятельно) с последующим обсуждением. Пока учащиеся решают тест, учитель может индивидуально или, объединяя учащихся в небольшие группы, беседовать по решению задач № 328–332 в зависимости от того, какие задания вызвали затруднения.

Учитель по своему усмотрению может раздать менее подготовленным учащимся обобщающие таблицы №2.

Задания теста:

1. Если $a \perp c$, $b \perp c$, то:
   а) $a \parallel b$; б) $a \perp b$; в) ответы а и б неверны.
2. Если $a \parallel c$, $b \parallel c$, то:
   а) $a \perp b$; б) $a \parallel b$; в) ответы а и б неверны.
3. Рис. 5.39.
   Если $a \parallel b$, c – секущая, то:
   а) $\angle 2 + \angle 3 = 180°$; б) $\angle 5 = \angle 2$; в) $\angle 1 + \angle 3 = 180°$.
4. Рис. 5.40.
   Для того, чтобы прямые a и b были параллельными, нужно, чтобы:
   а) $\angle 1 + \angle 4 = 180°$; б) $\angle 1 = \angle 2$; в) $\angle 3 = \angle 2$.
5. Рис. 5.41.
   $PR \parallel QD$, так как:
   а) $\angle 3 = \angle 7$; б) $\angle 8 = \angle 4$; в) $\angle 2 = \angle 6$.
6. Один из углов при пересечении двух параллельных прямых третьей равен 52°. Остальные углы равны:
   а) 52° и 132°; б) 52° и 128°; в) 52°.
7. Известно, что $M, N, P \in x$, $MN \parallel x$, $NP \parallel x$. Тогда:
   а) $MN \parallel NP$;
   б) MN совпадает с NP;
   в) $MN \cap NP$.

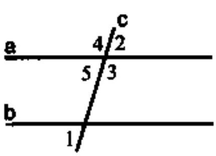


Рис. 5.39

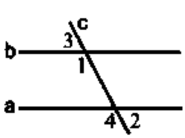


Рис. 5.40

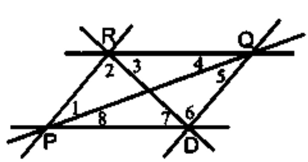


Рис. 5.41

8. Прямая AB пересекает параллельные прямые PK и MN ($A \in PK$, $B \in MN$). Сумма углов PAB и MBA равна 116°. Какие из следующих высказываний верны?

а) Точки K и M лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB;

б) Точки P и N лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AB;

в) Сумма углов PAB и NBA равна 180°.

9. Прямая MN является секущей для прямых AB и CD ($M \in AB$, $N \in CD$). Угол AMN равен 78°. При каком значении угла CNM прямые AB и CD могут быть параллельны?

а) 102°; б) 12°;
в) 78°; г) 78° и 102°.

Ответы к тесту:

1 а); 2 б); 3 в); 4 в); 5 в); 6 б); 7 б); 8 а), в); 9 г).

Решения задач № 328–332:

Задача № 328

Доказательство (см. рис. 5.42): Пусть O – середина отрезка AB.

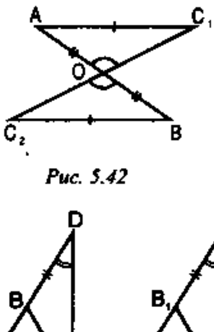


Рис. 5.42

Тогда $\Delta AOC_1 = \Delta BOC_2$, откуда $\angle AOC_2 = \angle BOC_2$. Следовательно, $\angle C_1OC_2 = \angle AOC_1 + \angle AOC_2 = \angle AOC_1 + (180° - \angle BOC_2) = 180°$, т.е. OC_1 и OC_2 лежат на одной прямой.

Задача № 329

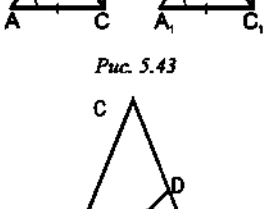


Рис. 5.43

Доказательство (см. рис. 5.43): Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $AC = A_1C_1$, $AB + BC = A_1B_1 + B_1C_1$. На продолжениях сторон AB и A_1B_1 отложим отрезки $BD = BC$ и $B_1D_1 = B_1C_1$.

Тогда $\Delta ACD = \Delta A_1C_1D_1$, откуда $\angle D = \angle D_1$, $\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$.

В треугольниках BCD и $B_1C_1D_1$ $\angle BCD = \angle D$ и $\angle B_1C_1D_1 = \angle D_1$, тогда $\angle BCD = \angle B_1C_1D_1$, а $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$.

Следовательно, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ по стороне и прилежащим к ней углам.

Задача № 330

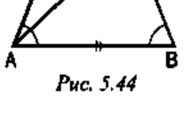


Рис. 5.44

Решение (рис. 5.44): В ΔABC $AC = CB > AB$, тогда между B и C существует точка D такая, что $AD = AB$. Тогда $\Delta ABC \neq \Delta ABD$, хотя они и удовлетворяют всем условиям задачи. (*Ответ*: могут.)

Задача № 331

Решение (рис. 5.45): Если в ΔABC $AC = BC$, а D – точка на продолжении стороны AB, то $\Delta ADC \neq \Delta BDC$, хотя они и удовлетворяют всем условиям задачи. (*Ответ*: могут.)

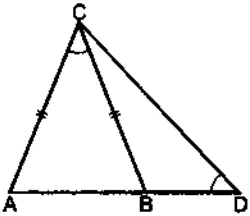


Рис. 5.45

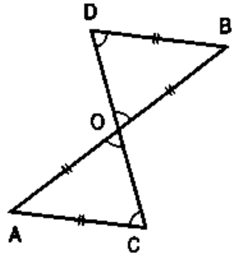


Рис. 5.46

Задача № 332

Доказательство (рис. 5.46): $\Delta\ DBO = \Delta\ CAO$, так как они равнобедреинные с равиыми боковыми сторонами и равными углами при основании (углы при вершине $\angle B = \angle A = 180° - 2\angle BOD = 180° - 2\angle AOC$), значит, $DO = OC$.

III. Решение задач

Задача 1

Рис. 5.47.

Найти: параллельные прямые.

(*Ответ*: $a \parallel c$.)

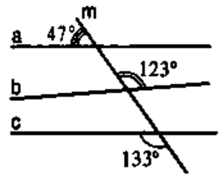


Рис. 5.47

Задача 2

Рис. 5.48.

Найти: параллельны ли прямые a и b.

(*Ответ*: да.)

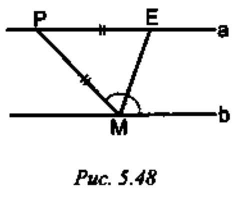


Рис. 5.48

Задача 3

Рис. 5.49.

Найти: параллельны ли прямые a и b.

(*Ответ*: нет.)

Задача 4

Рис. 5.50.

Дано: $a \parallel b$.

Найти: $\angle 1$, $\angle 2$.

(*Ответ*: $\angle 1 = 100°$, $\angle 2 = 80°$.)

Задача 5

Рис. 5.51.

Дано: $a \parallel b$.

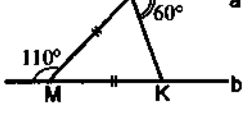


Рис. 5.49

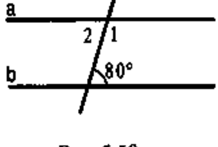


Рис. 5.50

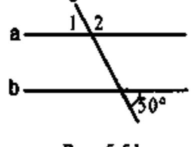


Рис. 5.51

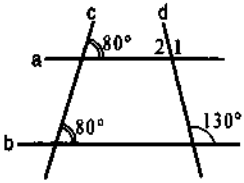


Рис. 5.52

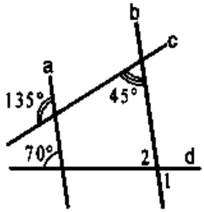


Рис. 5.53

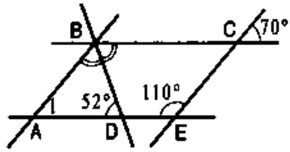


Рис. 5.54

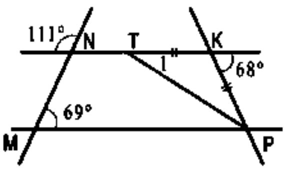


Рис. 5.55

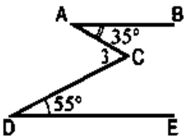


Рис. 5.56

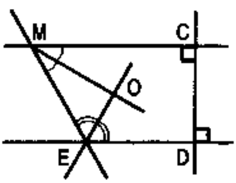


Рис. 5.57

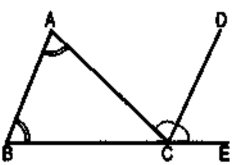


Рис. 5.58

Найти: $\angle 1$, $\angle 2$.
(***Ответ***: $\angle 1 = 50°$, $\angle 2 = 130°$.)

Задача 6
Рис. 5.52.
Найти: $\angle 1$, $\angle 2$.
(***Ответ***: $\angle 1 = 130°$, $\angle 2 = 50°$.)

Задача 7
Рис. 5.53.
Найти: $\angle 1$, $\angle 2$.
(***Ответ***: $\angle 1 = 70°$, $\angle 2 = 70°$.)

Задача 8
Рис. 5.54.
Найти: $\angle 1$.
(***Ответ***: $\angle 1 = 76°$.)

Задача 9
Рис. 5.55.
Найти: $\angle 1$.
(***Ответ***: $\angle 1 = 34°$.)

Задача 10
Рис. 5.56.
Найти: $\angle 3$.
(***Ответ***: $\angle 3 = 80°$.)

Задача 11
Рис. 5.57.
Найти: $\angle MOE$.
(***Ответ***: $\angle MOE = 90°$.)

Задача 12
Рис. 5.58.
Найти: параллельны ли *AB* и *CD*?
(***Ответ***: да.)

Задача 13
Рис. 5.59.
Дано: $a \parallel b$, DE – секущая, $DE = 3{,}9$ см.
Найти: MN.
(***Ответ***: $MN = 7{,}8$ см.)

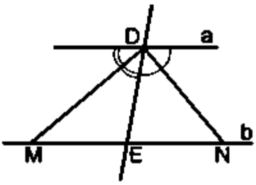


Рис. 5.59

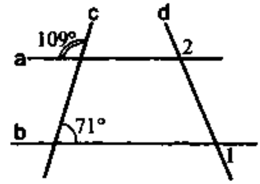


Рис. 5.60

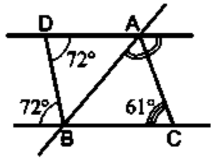


Рис. 5.61

Задача 14

Рис. 5.60.

Дано: $\angle 2 - \angle 1 = 44°$.

Найти: $\angle 1$, $\angle 2$.

(*Ответ*: $\angle 1 = 68°$, $\angle 2 = 112°$.)

Задача 15

Рис. 5.61.

Найти: $\angle ABC$.

(*Ответ*: $\angle ABC = 58°$.)

Задача 16

Рис. 5.62.

Найти: $\angle EMN$.

(*Ответ*: $\angle EMN = 106°$.)

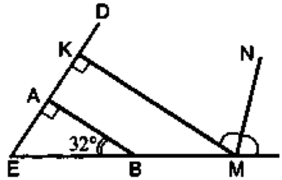


Рис. 5.62

Задача 17

Рис. 5.63.

Дано: $\angle ABD : \angle DBK = 1 : 2$, $DB \parallel EC$.

Найти: $\angle ECP$.

(*Ответ*: $\angle ECP = 150°$.)

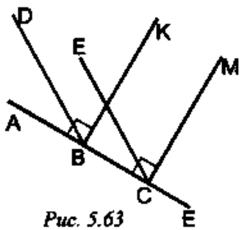


Рис. 5.63

Задача 18

Рис. 5.64.

Найти: $\angle ACK$.

(*Ответ*: $\angle ACK = 84°$.)

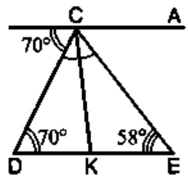


Рис. 5.64

Примечание: учащиеся за урок могут не решить все задачи. В зависимости от уровня класса можно отобрать нужное количество задач.

Домашнее задание

1. Повторить главу IV (§ 1, 2, 3), вопросы 1–18 (без доказательства).
2. Записать полное решение:

I уровень – к задачам № 7, 12, 15;

II уровень – к задачам № 16, 17, 18.

3. *Дополнительные задачи:* № 333, 335, 337.

Урок 66. Повторение темы «Соотношения между сторонами и углами треугольника»

Цели урока:

1) систематизировать знания, умения, навыки учащихся по теме урока;
2) совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Устный математический диктант

(Тексты раздать учащимся, работает весь класс, учащиеся по очереди читают текст, по своему усмотрению учитель до начала математического диктанта может дать 2–3 минуты на повторение теории, используя обобщающие таблицы №3.)

Закончите предложения:

Сумма углов треугольника равна ... . Треугольннк, у которого есть прямой угол, называется ... . Гипотенузой прямоугольного треугольника называется ... , другие стороны называются ... . Треугольник, в котором все три угла острые, называется ... . Треугольник, в котором один угол тупой, называется ... .

Угол, смежный с внутренним углом треугольника, называется ... . Внешний угол треугольника равен ... .

В треугольнике против большего угла лежит ... сторона, а против большей стороны лежит ... угол. В прямоугольном треугольнике ... больше катета. Если два угла треугольника равны, то треугольник ... . Каждая сторона треугольника меньше ... .

Сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна ... . Катет прямоугольного треугольника, ... , равен половине гипотенузы. Если катет прямоугольного треугольника ... , то угол ... равен 30°.

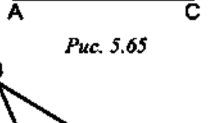


Рис. 5.65

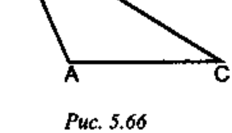


Рис. 5.66

Признак равенства прямоугольных треугольников по двум катетам гласит: ... . По признаку равенства прямоугольных треугольников по катету и прилежащему к нему острому углу ... . Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника ... . Это утверждение называют ... , а утверждение «Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника ...» называют ... .

III. Решение задач на готовых чертежах

Рисунки начертить в тетрадях и на них записать промежуточные результаты. Записать ответы.

Задача 1

Рис. 5.65.

Дано: $\angle C = 50°$, $\angle A$ на 20° больше $\angle B$.

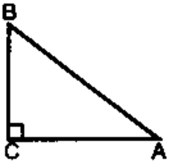


Рис. 5.67

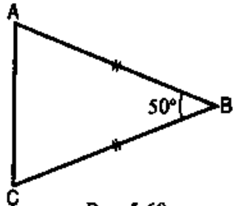


Рис. 5.68

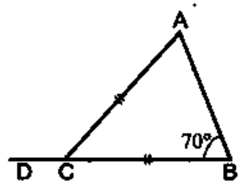


Рис. 5.69

Найти: $\angle A$, $\angle B$.
(*Ответ*: $\angle A = 75°$, $\angle B = 55°$.)

Задача 2

Рис. 5.66.
Дано: $\angle A : \angle B : \angle C = 11 : 4 : 3$.
Найти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.
(*Ответ*: $\angle A = 110°$, $\angle B = 40°$, $\angle C = 30°$.)

Задача 3

Рис. 5.67.
Дано: $\angle A$ в 1,5 раза меньше $\angle B$.
Найти: $\angle A$, $\angle B$.
(*Ответ*: $\angle A = 36°$, $\angle B = 54°$.)

Задача 4

Рис. 5.68.
Найти: $\angle A$, $\angle C$.
(*Ответ*: $\angle A = 65°$, $\angle C = 65°$.)

Задача 5

Рис. 5.69.
Найти: $\angle ACD$.
(*Ответ*: $\angle ACD = 140°$.)

Задача 6

Рис. 5.70.
Найти: $\angle B$.
(*Ответ*: $\angle B = 70°$.)

Задача 7

Рис. 5.71.
Найти: AC.
(*Ответ*: $AC = 15$.)

Задача 8

Рис. 5.72.
Найти: AB.
(*Ответ*: $AB = 16$.)

Задача 9

Рис. 5.73.
Дано: CE – биссектриса.

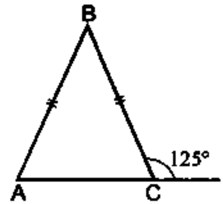


Рис. 5.70

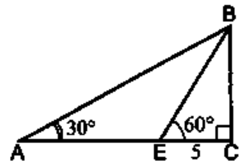


Рис. 5.71

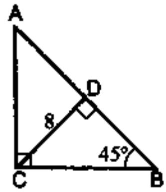


Рис. 5.72

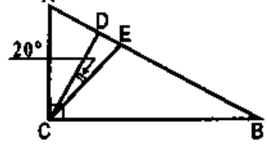


Рис. 5.73

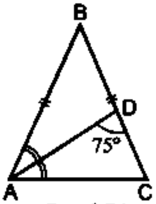


Рис. 5.74

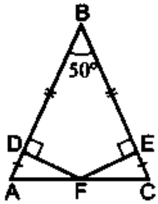


Рис. 5.75

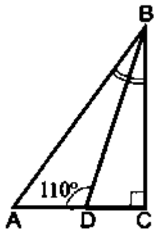


Рис. 5.76

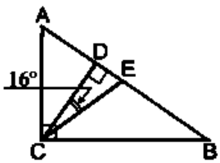


Рис. 5.77

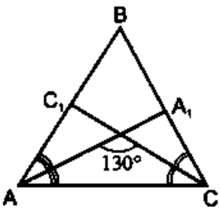


Рис. 5.78

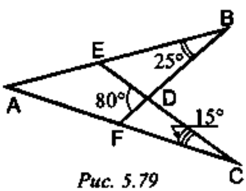


Рис. 5.79

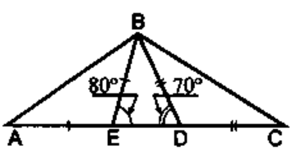


Рис. 5.80

Найти: $\angle A$, $\angle B$.
(*Ответ*: $\angle A = 65°$, $\angle B = 25°$.)
Задача 10
Рис. 5.74.
Дано: $AB = BC$.
Найти: $\angle B$.
(*Ответ*: $\angle B = 40°$.)
Задача 11
Рис. 5.75.
Найти: $\angle DFE$.
(*Ответ*: $\angle DFE = 130°$)
Задача 12
Рис. 5.76.
Найти: $\angle BAD$.
(*Ответ*: $\angle BAD = 50°$)
Задача 13
Рис. 5.77.
Дано: CE – медиана.
Найти: $\angle A$, $\angle B$.
(*Ответ*: $\angle A = 53°$, $\angle B = 37°$.)
Задача 14
Рис. 5.78.
Найти: $\angle B$.
(*Ответ*: $\angle B = 80°$.)
Задача 15
Рис. 5.79.
Найти: $\angle A$.
(*Ответ*: $\angle A = 40°$.)
Задача 16
Рис. 5.80.
Найти: $\angle ABC$.
(*Ответ*: $\angle ABC = 135°$.)
Задача 17
Рис. 5.81.

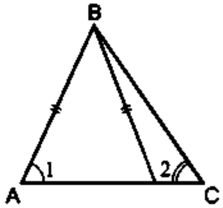


Рис. 5.81

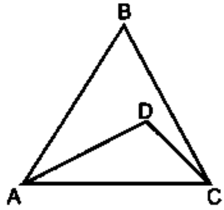


Рис. 5.82

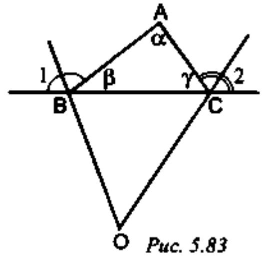


Рис. 5.83

Сравнить: $\angle 1$ и $\angle 2$.
(*Ответ*: $\angle 1 > \angle 2$.)

Задача 18

Рис. 5.82.
Сравнить: $\angle ABC$ и $\angle ADC$.
(*Ответ*: $\angle ABC < \angle ADC$.)

IV. Проверка домашнего задания

Пока учащиеся решают задачи, учитель индивидуально проверяет домашнее задание у отдельных учащихся.

Задача № 333

Решение (см. рис. 5.83): $\angle BOC = 180° - \angle OBC - \angle OCB$.

Пусть $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$, тогда $\angle OBC = \angle 1$, а $\angle 1 = 1/2\,(180° - \beta)$, $\angle OCB = \angle 2 = 1/2\,(180° - \gamma)$.

Тогда $\angle BOC = 180° - 1/2\,(180° - \beta) - 1/2\,(180° - \gamma) = 180° - 90° + \frac{\beta}{2} - 90° + \frac{\gamma}{2} = 1/2\,(\beta + \gamma) = 1/2\,(180° - \alpha) = 90° - \frac{\alpha}{2}$, так как $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Задача № 335

Решение:

а) В ΔABC по условию $\angle A + \angle B > 90°$, а так как $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, то $\angle C < 90°$. Так же можно получить, что $\angle A < 90°$, $\angle B < 90°$, то есть ΔABC – остроугольный.

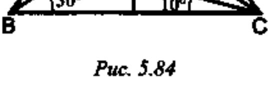


Рис. 5.84

б) В ΔABC по условию $\angle A < \angle B + \angle C$, а так как $\angle B + \angle C = 180° - \angle A$, то $\angle A < 180° - \angle A$, $\angle A < 90°$, тогда ΔABC – остроугольный.

Задача № 337

Решение (см. рис. 5.84): Пусть O – точка пересечения биссектрисы угла A и прямой BM.

Тогда $\angle OAB = \angle OAC = 40°$, $\angle ABC = \angle ACB = (180° - 80°) : 2 = 50°$.
$\Delta BAO = \Delta CAO$, тогда $\angle ACO = 20°$, а $\angle OCM = 20°$, $\angle AOB = 120°$.
$\angle OMC$ – внешний угол треугольника BMC, $\angle OMC = 40°$.

$\Delta AOC = \Delta MOC$ по стороне и прилежащим к ней углам, значит, $OA = OM$, тогда ΔAOM – равнобедренный, и $\angle OAM = \angle OMA = 30°$, тогда $\angle AMC = 70°$. (*Ответ*: $\angle AMC = 70°$.)

Домашнее задание

1. Повторить § 4 (глава II, IV); прочитать тему «Задачи на построение» на стр. 95 учебника.
2. Записать полное решение задач: ***I уровень*** – № 5, 7, 9, 17; ***II уровень*** – № 11, 13, 15, 18.

Урок 67. Повторение темы «Задачи на построение»

Цели урока:

1) повторить основные задачи на построение;
2) совершенствовать навыки решения задач на построение.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Повторение основных задач на построение

1. Шестеро учеников готовят у доски следующие задания:

– на данном луче от его начала отложить отрезок, равный данному;
– отложить от данного луча угол, равный данному;
– построить биссектрису данного неразвернутого угла;
– построить прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную к прямой, на которой лежит данная точка;
– построить середину данного отрезка;
– построить прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную к прямой, не проходящей через данную точку.

Пока учащиеся готовятся у доски, класс выполняет дифференцированные задания:

I уровень

Построить треугольник:

1) по двум сторонам и углу между ними;
2) по стороне и прилежащим к ней углам;
3) по трем сторонам.

II уровень

Построить треугольник по углу и двум высотам, проведенным к сторонам этого угла.

III. Обсуждение темы «Задачи на построение»

(См. стр. 95 учебника.)

– По какой схеме решаются более сложные задачи на построение?
– Что вы понимаете под анализом задачи на построение? Для чего он нужен?
– Для чего нужно доказательство? А исследование?

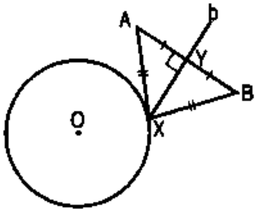


Рис. 5.85

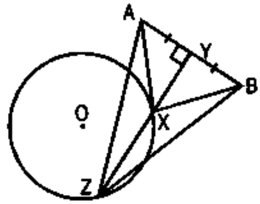


Рис. 5.86

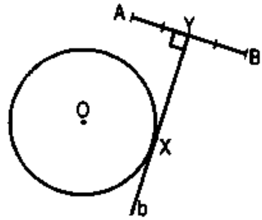


Рис. 5.87

IV. Решение задач

1. Решить задачу № 353 (один ученик работает у доски, остальные – в тетрадях).

Задача № 353

Анализ (см. рис. 5.85): Пусть X – искомая точка, т.е. $AX = XB$, тогда $\Delta\ AXB$ – равнобедренный, и XY – медиана, высота и биссектриса. Отсюда получаем план построения.

План построения:

1) Построить точку Y – середину AB.

2) Построить прямую, проходящую через Y и перпендикулярную AB.

3) Прямая b пересекается с окружностью в точках X и Z. X и Z – искомые точки.

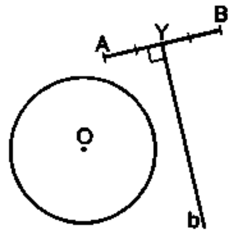


Рис. 5.88

Построение (см. рис. 5.86).

Доказательство: $\Delta\ AYX = \Delta\ BYX$ по двум катетам (они прямоугольные, т.к. $YX \perp AB$, $AY = YB$, так как Y – середина AB), тогда $AX = BX$, т.е. точка X лежит на данной окружности и равноудалена от концов отрезка AB. Таким же образом можно доказать, что точка Z удовлетворяет всем условиям задачи.

Исследование: Задача может иметь:

а) два решения (см. план построения и построение);

б) одно решение, если прямая b имеет одну общую точку (касается) с окружностью (рис. 5.87);

в) ни одного решения, если прямая b не имеет общих точек с окружностью (рис. 5.88).

2. Решить самостоятельно задачи № 354, 360, 362 (одну задачу решить по полной схеме).

Домашнее задание

Решить задачи № 352, 356, 361 (одну задачу решить по полной схеме).

Урок 68 (1). Итоговая контрольная работа
(см. Приложение 1)

Урок 68 (2). Итоговый контрольный тест
(см. Приложение 1)

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Контрольные работы

Урок 10. Контрольная работа №1 «Основные свойства простейших геометрических фигур. Смежные и вертикальные углы»

I уровень

Вариант I

1. На луче с началом в точке A отмечены точки B и C.

Найдите отрезок BC, если $AB = 9{,}2$ см, $AC = 2{,}4$ см. Какая из точек лежит между двумя другими?

2. Один из углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, в четыре раза меньше другого. Найдите эти углы.

3. Луч c – биссектриса $\angle(ab)$. Луч d – биссектриса $\angle(ac)$.

Найдите $\angle(bd)$, если $\angle(ad) = 20°$.

4*. Рис. 1.116.

Дано: $\angle BOC = 148°$, $OM \perp OC$, OK – биссектриса $\angle COB$.

Найти: $\angle KOM$.

Вариант II

1. На луче с началом в точке A отмечены точки B и C.

Найдите отрезок BC, если $AB = 3{,}8$ см, $AC = 5{,}6$ см. Какая из точек лежит между двумя другими?

2. Один из углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, на 70° больше другого.

Найдите эти углы.

3. Луч c – биссектриса $\angle(ab)$. Луч d – биссектриса $\angle(ac)$.

Найдите $\angle(bd)$, если $\angle(ab) = 80°$.

4*. Рис. 1.117.

Дано: $\angle AOK = 154°$, $OC \perp OK$, OM – биссектриса $\angle KOA$.

Найти: $\angle COM$.

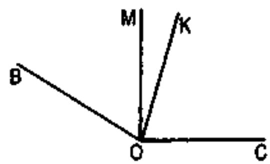


Рис. 1.116

II уровень

Вариант I

1. На луче с началом в точке A отмечены точки B и C. Известно, что $AB = 10{,}3$ см, $BC = 2{,}4$ см. Какую длину может иметь отрезок AC?

2. Разность двух углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, равна 42°.

Найдите все образовавшиеся углы.

3. Один из смежных углов в пять раз больше другого.

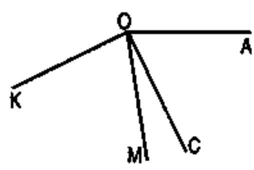


Рис. 1.117

Найдите углы, которые образует биссектриса большего угла со сторонами меньшего.

4*. Прямые AB и CD пересекаются в точке O. OK – биссектриса угла AOD, $\angle COK = 118°$.

Найдите $\angle BOD$.

Вариант II

1. На луче с началом в точке A отмечены точки B и C. Известно, что $AC = 7{,}8$ см, $BC = 2{,}5$ см. Какую длину может иметь отрезок AB?

2. Один из углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, на $22°$ меньше другого.

Найдите все образовавшиеся углы.

3. Один из смежных углов в четыре раза меньше другого.

Найдите углы, которые образует биссектриса меньшего угла со сторонами большего.

4*. Прямые MN и PK пересекаются в точке E. EC – биссектриса угла MED, $\angle CEK = 137°$.

Найдите $\angle KEM$.

III уровень

Вариант I

1. На прямой отмечены точки B, C и D. Какую длину может иметь отрезок BD, если $BC = 4{,}2$ см, $CD = 5{,}1$ см.

2. *Найдите* все углы, образовавшиеся при пересечении двух прямых, если сумма двух из них в 3 раза меньше суммы двух других.

3. Из вершины угла, равного α, проведен луч, равный биссектрисе угла. Какие углы образует этот луч со сторонами данного угла?

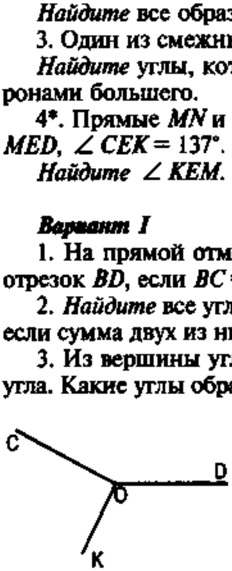


Рис. 1.118

4*. Рис. 1.118.

Дано: $\angle COD - \angle KOD = 61°$, $\angle COD - \angle KOC = 53°$.

Найти: $\angle COD$.

Вариант II

1. На прямой отмечены точки B, C и D. Какую длину может иметь отрезок BD, если $CD = 2{,}6$ см, $BC = 3{,}7$ см.

2. Сумма двух углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, в пять раз меньше суммы двух других.

Найдите все образовавшиеся углы.

3. Из вершины угла проведен луч, перпендикулярный его биссектрисе и образующий со стороной данного угла угол, равный β.

Найдите величину данного угла.

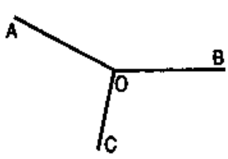


Рис. 1.119

4*. Рис. 1.119.

Дано: $\angle AOB - \angle AOC = 27°$, $\angle AOB - \angle BOC = 42°$.

Найти: $\angle AOB$.

Урок 28. Контрольная работа №2 по теме «Треугольники»

I уровень

Вариант I

1. *Дано*: $AO = BO$, $CO = DO$, $CO = 5$ см, $BO = 3$ см, $BD = 4$ см (рис. 2.197).

Найти: периметр $\Delta\ CAO$.

2. В равнобедренном треугольнике ABC точки K и M являются серединами боковых сторон AB и BC соответственно. BD – медиана треугольника.

Докажите, что $\Delta\ BKD = \Delta\ BMD$.

3. Даны неразвернутый угол и отрезок. На сторонах данного угла постройте точки, удаленные от вершины угла на расстояние, равное половине данного отрезка.

4*. Прямая MK разбивает плоскость на две полуплоскости. Из точек M и K в разные полуплоскости проведены равные отрезки MA и KB, причем $\angle AMK = \angle BKM$. Какие из высказываний верные?

а) $\Delta\ AMB = \Delta\ AKB$; б) $\angle AKM = \angle BMK$;
в) $\Delta\ MKA = \Delta\ KMB$; г) $\angle AMB = \angle KMB$.

Вариант II

1. *Дано:* $AB = CD$, $BC = AD$, $AC = 7$ см, $AD = 6$ см, $AB = 4$ см (рис. 2.198).

Найти: периметр $\Delta\ ADC$.

2. В равнобедренном $\Delta\ ABC$ точки K и M являются серединами боковых сторон AB и BC соответственно. BD – медиана треугольника.

Докажите, что $\Delta\ AKD = \Delta\ CMD$.

3. Дан неразвернутый угол и отрезок. На биссектрисе данного угла постройте точку, удаленную от вершины угла на расстояние, равное данному отрезку.

4*. Прямая AB разбивает плоскость на две полуплоскости. Из точек A и B в разные полуплоскости проведены равные отрезки AD и BC, причем $\angle BAD = \angle ABC$. Какие из высказываний верные?

а) $\Delta\ CAD = \Delta\ BDA$; б) $\angle DBA = \angle CAB$;
в) $\angle BAD = \angle BAC$; г) $\angle ADB = \angle BCA$.

II уровень

Вариант I

1. В равнобедренном треугольнике с периметром 48 см боковая сторона относится к основанию как 5 : 2.

Найдите стороны треугольника.

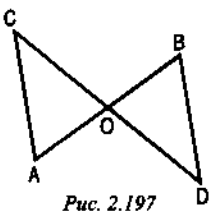


Рис. 2.197

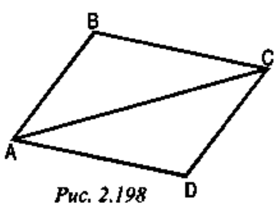


Рис. 2.198

2. Дан неразвернутый угол и отрезок. Постройте все точки, удаленные от вершины угла на расстояние, равное четверти данного отрезка.

3. В треугольнике ABC $AB = BC$. На медиане BE отмечена точка M, а на сторонах AB и BC – точки P и K соответственно (точки P, M и K не лежат на одной прямой). Известно, что $\angle BMP = \angle BMK$.

Докажите, что:

а) углы BPM и BKM равны;

б) прямые PK и BM взаимно перпендикулярны.

4*. Как с помощью циркуля и линейки построить угол в $67°30'$?

Вариант II

1. В равнобедренном треугольнике с периметром 56 см основание относится к боковой стороне как 2 : 3.

Найдите стороны треугольника.

2. Дан неразвернутый угол и отрезок. Постройте все точки, удаленные от вершины угла на расстояние, равное трем четвертям данного отрезка.

3. На высоте равнобедренного ΔABC, проведенной к основанию AC, взята точка P, а на сторонах AB и BC – точки M и K соответственно (точки M, P и K не лежат на одной прямой). Известно, что $BM = BK$.

Докажите, что:

а) углы BMP и BKP равны;

б) углы KMP и PKM равны.

4*. Как с помощью циркуля и линейки построить угол в $11°15'$?

III уровень

Вариант I

1. Периметр равнобедренного треугольника в четыре раза больше основания и на 10 см больше боковой стороны.

Найдите стороны треугольника.

2. Внутри ΔABC взята точка O, причем $\angle BOC = \angle BOA$, $AO = OC$.

Докажите, что:

а) углы BAC и BCA равны;

б) прямая BO проходит через середину отрезка AC.

3. Даны неразвернутый угол и отрезок. Постройте угол, равный половине данного угла, и на его сторонах постройте точки, удаленные от вершины угла на расстояние, равное четверти данного отрезка.

4*. Дан угол в $54°$. Можно ли с помощью циркуля и линейки построить угол в $18°$?

Вариант II

1. Боковая сторона равнобедренного треугольника в два раза больше основания и на 12 см меньше периметра треугольника.

Найдите стороны треугольника.

2. На сторонах AB, BC, AC равнобедренного треугольника ABC с основанием AC отмечены точки M, K и P соответственно так, что $\angle AMP = \angle PKC$ и $AM = KC$.

Докажите, что:

а) PB – биссектриса угла MPK;

б) прямые MK и BP взаимно перпендикулярны.

3. Даны неразвернутый угол и отрезок. Постройте угол, равный четверти данного угла, и на его сторонах постройте точки, удаленные от вершины угла на расстояние, равное половине данного отрезка.

4*. Дан угол в 34°. Можно ли с помощью циркуля и линейки построить угол в 12°?

Урок 41. Контрольная работа №3 по теме «Параллельные прямые»

I уровень

Вариант I

1. Рис. 3.169.

Дано: $a \parallel b$, c – секущая, $\angle 1 + \angle 2 = 102°$.

Найти: все образовавшиеся углы.

2. Рис. 3.170.

Дано: $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = 120°$.

Найти: $\angle 4$.

3. Отрезок AD – биссектриса треугольника ABC. Через точку D проведена прямая, параллельная стороне AB и пересекающая сторону AC в точке F.

Найти углы треугольника ADF, если $\angle BAC = 72°$.

4*. Прямая EK является секущей для прямых CD и MN ($E \in CD$, $K \in MN$).

$\angle DEK$ равен 65°. При каком значении угла NKE прямые CD и MN могут быть параллельными?

Вариант II

1. Рис. 3.171.

Дано: $a \parallel b$, c – секущая, $\angle 1 - \angle 2 = 102°$.

Найти: все образовавшиеся углы.

2. Рис. 3.172.

Дано: $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = 140°$.

Найти: $\angle 4$.

3. Отрезок AK – биссектриса треугольника CAE.

Через точку K проведена прямая, параллельная стороне CA и пересекающая сторону AE в точке N.

Найдите углы треугольника AKN, если $\angle CAE = 78°$.

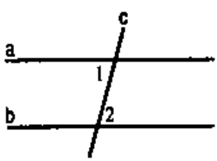


Рис. 3.169

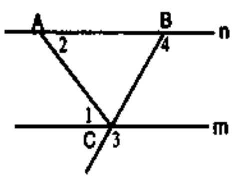


Рис. 3.170

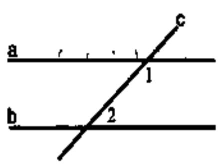


Рис. 3.171

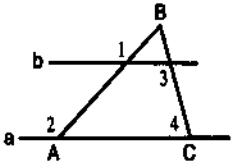


Рис. 3.172

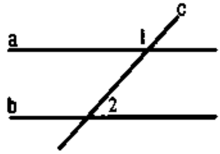


Рис. 3.173

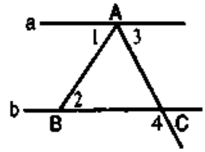


Рис. 3.174

4*. Прямая MN является секущей для прямых AB и CD ($M \in AB$, $N \in CD$). Угол AMN равен 75°.

При каком значении угла CNM прямые AB и CD могут быть параллельными?

II уровень

Вариант I

1. Рис. 3.173.

Дано: $a \parallel b$, c – секущая, $\angle 1 : \angle 2 = 7 : 2$.

Найти: все образовавшиеся углы.

2. Рис. 3.174.

Дано: $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3$ в 4 раза меньше $\angle 4$.

Найти: $\angle 3$, $\angle 4$.

3. Отрезок DM – биссектриса треугольника CDE. Через точку M проведена прямая, пересекающая сторону DE в точке N так, что $DN = MN$. Найдите углы треугольника DMN, если $\angle CDE = 74°$.

4*. Из точек A и B, лежащих по одну сторону от прямой, проведены перпендикуляры AC и BD к этой прямой, $\angle BAC = 117°$.

а) *Найдите* угол ABD.

б) *Докажите*, что прямые AB и CD пересекаются.

Вариант II

1. Рис. 3.175.

Дано: $a \parallel b$, c – секущая, $\angle 1 : \angle 2 = 5 : 7$.

Найти: все образовавшиеся углы.

2. Рис. 3.176.

Дано: $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, угол 3 на 70° меньше угла 4.

Найти: $\angle 3$, $\angle 4$.

3. Отрезок AD – биссектриса ΔABC. Через точку D проведена прямая, пересекающая сторону AB в точке E так, что $AE = ED$.

Найдите углы треугольника AED, если $\angle BAC = 64°$.

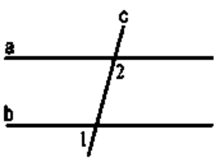


Рис. 3.175

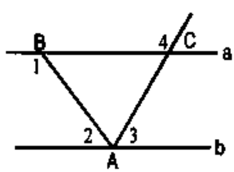


Рис. 3.176

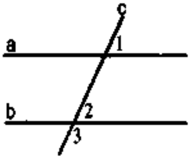


Рис. 3.177

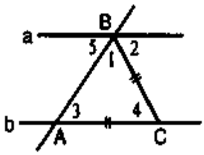


Рис. 3.178

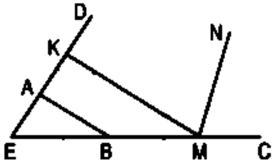


Рис. 3.179

4*. На сторонах угла *A*, равного 43°, отмечены точки *B* и *C*, а внутри угла – точка *D* так, что $\angle ABD = 137°$, $\angle BDC = 45°$.

а) *Найдите* угол *ACD*.

б) *Докажите*, что прямые *AB* и *DC* имеют одну общую точку.

III уровень

Вариант I

1. Рис. 3.177.

Дано: $a \parallel b$, c – секущая, $\angle 3$ больше суммы $\angle 1 + \angle 2$ в четыре раза.

Найти: все образовавшиеся углы.

2. Рис. 3.178.

Дано: $AC = BC$, $\angle 4 = \angle 2$, $\angle 3 + \angle 4 = 110°$.

Найти: $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$.

3. Рис. 3.179.

Дано: $AB \perp ED$, $KM \perp ED$, $\angle ABE = 34°$, MN – биссектриса $\angle KMC$.

Найти: $\angle EMN$.

4*. В треугольнике ABC $\angle A = 37°$, $\angle C = 65°$. Через вершину *B* проведена прямая $MN \parallel AC$.

Найдите угол *MBD*, где *BD* – биссектриса угла *ABC*.

Вариант II

1. Рис. 3.180.

Дано: $a \parallel b$, c – секущая, $\angle 2$ меньше разности $\angle 3 - \angle 1$ в 7 раз.

Найти: все образовавшиеся углы.

2. Рис. 3.181.

Дано: $AB = AC$, $\angle 2 = \angle 5$, $\angle 1 + \angle 3 = 130°$.

Найти: $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$.

3. Рис. 3.182.

Дано: $CD \perp AK$, $MN \perp AK$, $\angle AMN = 28°$, CE – биссектриса $\angle BCD$.

Найти: $\angle ACE$.

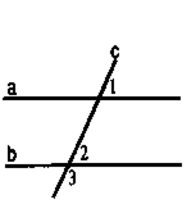


Рис. 3.180

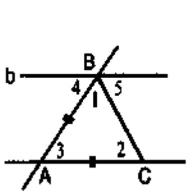


Рис. 3.181

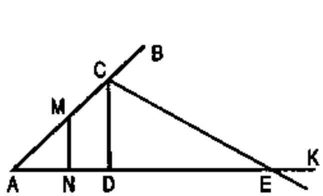


Рис. 3.182

4*. В треугольнике CDE $\angle C = 39°$, $\angle E = 57°$. Через вершину D проведена прямая $AB \parallel CE$.

Найдите угол ADK, где DK – биссектриса угла CDE.

Урок 49. Контрольная работа №4 по теме «Сумма углов треугольника. Соотношения между сторонами и углами треугольника»

I уровень

Вариант I

1. В ΔABC $AB > BC > AC$.

Найдите $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, если известно, что один из углов треугольника равен 120°, а другой 40°.

2. В треугольнике ABC угол A равен 50°, а угол B в 12 раз меньше угла C. *Найдите* углы B и C.

3. В треугольнике ABC угол C равен 90°, а угол B равен 35°, CD – высота. *Найдите* углы треугольника ACD.

4*. Периметр равнобедренного треугольника равен 45 см, а одна из его сторон больше другой на 12 см.

Найдите стороны треугольника.

Вариант II

1. В ΔABC $AB < BC < AC$.

Найдите $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, если известно, что один из углов треугольника прямой, а другой равен 30°.

2. В треугольнике ABC угол A равен 90°, а угол C на 40° больше угла B. *Найдите* углы B и C.

3. В треугольнике ABC угол C равен 90°, угол A равен 70°, CD – биссектриса.

Найдите углы треугольника BCD.

4*. Периметр равнобедренного треугольника равен 50 см, а одна из его сторон на 13 см меньше другой.

Найдите стороны треугольника.

II уровень

Вариант I

1. В треугольнике CDE точка M лежит на стороне CE, причем угол CMD острый.

Докажите, что $DE > DM$.

2. *Найдите* углы треугольника ABC, если угол A на 60° меньше угла B и в 2 раза меньше угла C.

3. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) биссектрисы CD и AE пересекаются в точке O. $\angle AOC = 105°$.

Найдите острые углы треугольника ABC.

4*. Один из внешних углов треугольника в два раза больше другого внешнего угла.

Найдите разность между этими внешними углами, если внутренний угол треугольника, не смежный с указанными внешними углами, равен 45°.

Вариант II

1. В треугольнике MNP точка K лежит на стороне MN, причем угол MNP острый.

Докажите, что $KP < MP$.

2. *Найдите* углы треугольника ABC, если угол B на 40° больше угла A, а угол C в пять раз больше угла A.

3. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) биссектрисы CD и BE пересекаются в точке O. $\angle BOC = 95°$.

Найдите острые углы треугольника ABC.

4*. Один из внешних углов треугольника в два раза больше другого внешнего угла этого треугольника.

Найдите разность между этими внешними углами, если внутренний угол треугольника, не смежный с указанными внешними углами, равен 60°.

III уровень

Вариант I

1. В треугольнике MNK $\angle K = 37°$, $\angle M = 69°$, NP – биссектриса треугольника.

Докажите, что $MP < PK$.

2. В треугольнике ABC угол A меньше угла B в три раза, а внешний угол при вершине A больше внешнего угла при вершине B на 40°.

Найдите внутренние углы треугольника ABC.

3. В треугольнике ABC угол C равен 90°, а угол B равен 70°. На катете AC отложен отрезок CD, равный CB.

Найдите углы треугольника ABD.

4*. Рис. 4.83.

Найдите сумму внутренних и сумму внешних углов, взятых по одному при каждой вершине пятиугольника $ABCDE$.

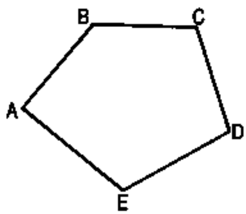


Рис. 4.83

Вариант II

1. В треугольнике CDE $\angle E = 76°$, $\angle D = 66°$, EK – биссектриса треугольника.

Докажите, что $KC > DK$.

2. В треугольнике ABC угол A меньше угла B на 80°, а внешний угол при вершине A больше внешнего угла при вершине B в два раза.

Найдите внутренние углы треугольника ABC.

3. В треугольнике ABC угол C равен 90°, а угол B равен 70°. На луче CB отложен отрезок CD, равный CA.

Найдите углы треугольника ABD.

4*. Рис. 4.84.

Найдите сумму внутренних и сумму внешних углов, взятых по одному при каждой вершине шестиугольника $ABCDEF$.

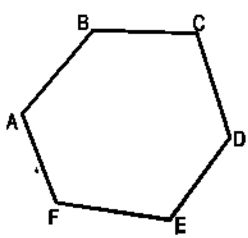


Рис. 4.84

Урок 61. Контрольная работа №5 по теме «Прямоугольный треугольник. Построение треугольника по трем элементам»

I уровень

Вариант I

1. Рис. 4.244.

Дано: $\angle BAD = \angle BCD = 90^\circ$, $\angle ADB = 15^\circ$, $\angle BDC = 75^\circ$.

Доказать: $AD \parallel BC$.

2. В треугольнике ABC $\angle C = 60^\circ$, $\angle B = 90^\circ$. Высота BB_1 равна 2 см. *Найдите* AB.

3. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и высоте, проведенной к нему из вершины треугольника.

4*. С помощью циркуля и линейки постройте угол, равный 150°.

Вариант II

1. Рис. 4.245.

Дано: $\angle AOD = 90^\circ$, $\angle OAD = 70^\circ$, $\angle OCB = 20^\circ$.

Доказать: $AD \parallel BC$.

2. В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, CC_1 – высота, $CC_1 = 5$ см, $BC = 10$ см. *Найдите* $\angle CAB$.

3. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и медиане, проведенной к нему из вершины треугольника.

4*. С помощью циркуля и линейки постройте угол, равный 120°.

II уровень

Вариант I

1. В остроугольном треугольнике MNP биссектриса угла M пересекает высоту NK в точке O, причем $OK = 9$ см.

Найдите расстояние от точки O до прямой MN.

2. Один из углов прямоугольного треугольника равен 60°, а сумма гипотенузы и меньшего катета равна 42 см.

Найдите гипотенузу.

3. *Постройте* прямоугольный треугольник по гипотенузе и острому углу.

4*. С помощью циркуля и линейки постройте угол, равный 105°.

Вариант II

1. В прямоугольном треугольнике DCE с прямым углом C проведена биссектриса EF, причем $FC = 13$ см.

Найдите расстояние от точки F до прямой DE.

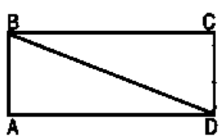


Рис. 4.244

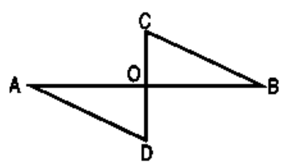


Рис. 4.245

2. Один из углов прямоугольного треугольника равен 60°, а разность гипотенузы и меньшего катета равна 15 см.

Найдите гипотенузу.

3. Постройте прямоугольный треугольник по катету и прилежащему к нему острому углу.

4*. С помощью циркуля и линейки постройте угол, равный 165°.

III уровень

Вариант I

1. В треугольнике ABC $\angle B = 90°$, а биссектрисы углов A и C пересекаются в точке O.

Найдите угол AOC.

2. В треугольнике ABC $\angle A = 90°$, $\angle B = 60°$. На стороне AC отмечена точка D так, что $\angle DBC = 30°$, $DA = 4$ см.

Найдите AC и расстояние от точки D до стороны BC.

3. Постройте прямоугольный треугольник по катету и высоте, проведенной к гипотенузе.

4*. С помощью циркуля и линейки постройте угол, равный 67°30′.

Вариант II

1. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, а биссектрисы углов A и B пересекаются в точке E.

Найдите: $\angle AEB$.

2. В треугольнике ABC $\angle C = 60°$. На стороне AC отмечена точка D так, что $\angle BDC = 60°$, $\angle ABD = 30°$, $CD = 5$ см.

Найдите AC и расстояние от точки D до стороны AB.

3. *Постройте* прямоугольный треугольник по катету и биссектрисе прямого угла.

4*. С помощью циркуля и линейки постройте угол, равный 112°30′.

Урок 68 (1). Итоговая контрольная работа

I уровень

Вариант I

1. Рис. 5.89.

Дано: $BO = DO$, $\angle ABC = 45°$, $\angle BCD = 55°$, $\angle AOC = 100°$.

Найти: $\angle D$.

Доказать: $\Delta ABO = \Delta CDO$.

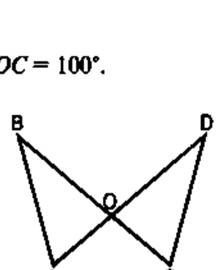


Рис. 5.89

2. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC угол B равен 42°.

Найдите два других угла треугольника ABC.

3. Точки B и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AC. Треугольники ABC и ADC – равносторонние.

Докажите, что $AB \parallel CD$.

4*. Рис. 5.90.

Дано: $\angle EPM = 90°$, $\angle MEP = 30°$, $ME = 10$ см.

а) Между какими целыми числами заключена длина отрезка EP?

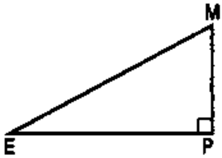


Рис. 5.90

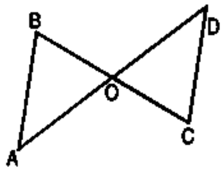


Рис. 5.91

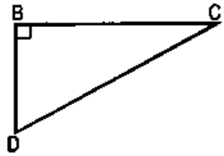


Рис. 5.92

б) Найдите длину медианы PD.

Вариант II

1. Рис. 5.91.

Дано: $AB = CD$, $\angle ABC = 65°$, $\angle ADC = 45°$, $\angle AOC = 110°$.

Найти: $\angle C$.

Доказать: $\Delta ABO = \Delta DCO$.

2. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC сумма углов A и C равна 156°.

Найдите углы треугольника ABC.

3. Точки B и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AC. Треугольники ABC и ADC – равнобедренные прямоугольные ($\angle B = \angle D = 90°$).

Докажите, что $AB \parallel CD$.

4*. Рис. 5.92.

Дано: $\angle DBC = 90°$, $\angle BDC = 60°$, $BD = 4$ см.

а) Между какими целыми числами заключена длина отрезка BC?

б) Найдите длину медианы PD.

II уровень

Вариант I

1. Рис. 5.93.

Дано: $\angle B = \angle C = 90°$, $\angle ADC = 50°$, $\angle ADB = 40°$.

Доказать: $\Delta ABD = \Delta DCA$.

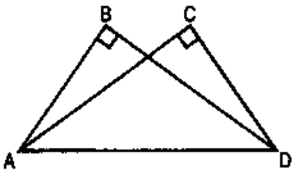


Рис. 5.93

2. В равнобедренном треугольнике угол между боковыми сторонами в три раза больше угла при основании.

Найдите углы треугольника.

3. Параллельные прямые a и b пересечены двумя параллельными секущими AB и CD, причем точки A и C лежат на прямой a, а точки B и D – на прямой b.

Докажите, что $AC = BD$.

4*. Рис. 5.94.

Дано: $AB = BC$, $BT = 4$ см.

а) Между какими целыми числами заключена длина отрезка AC?

б) Найдите сумму длин отрезков, соединяющих точку T с серединами сторон AB и BC.

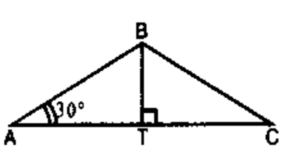


Рис. 5.94

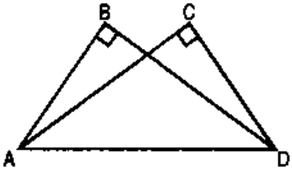


Рис. 5.95

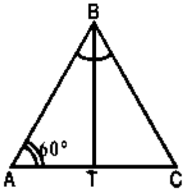


Рис. 5.96

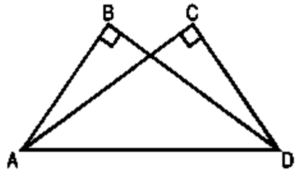


Рис. 5.97

Вариант II

1. Рис. 5.95.

Дано: $\angle B = \angle C = 90°$, $\angle ADB = 40°$, $\angle BDC = 10°$.

Доказать: $\Delta ABD = \Delta DCA$.

2. В равнобедренном треугольнике угол при основании в четыре раза больше угла между боковыми сторонами.

Найдите углы треугольника.

3. Параллельные прямые a и b пересечены двумя параллельными секущими AB и CD, причем точки A и C принадлежат прямой a, а точки B и D – прямой b.

Докажите, что $AB = CD$.

4*. Рис. 5.96.

Дано: $AB = BC$, $AC = 10$ см.

а) Между какими целыми числами заключена длина высоты ΔABC?

б) Найдите сумму длин отрезков, соединяющих точку T с серединами сторон AB и BC.

III уровень

Вариант I

1. Рис. 5.97.

Дано: $\angle B = \angle C = 90°$, $AB = DC$, $\angle AOB = 40°$.

Найдите углы треугольника AOD.

Найдите углы треугольника.

3. *Докажите*, что основание равнобедренного треугольника параллельно биссектрисе одного из внешних углов.

4*. В треугольнике ABC $\angle B = 90°$, $\angle A = = 45°$, $AC = 12$ см, BD – биссектриса.

а) Между какими целыми числами заключено расстояние от точки D до стороны AB?

б) Найдите длину отрезка MN, где $DM \perp AB$, $DN \perp BC$.

Вариант II

1. Рис. 5.98.

Дано: $\angle B = \angle C = 90°$, $AB = DC$, $\angle CDO = = 40°$.

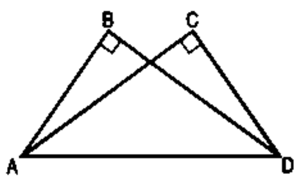


Рис. 5.98

Найдите углы треугольника AOD.

2. В равнобедренном треугольнике один из внешних углов равен 130°. *Найдите* углы треугольника.

3. *Докажите*, что если биссектриса внешнего угла параллельна одной из его сторон, то этот треугольник – равнобедренный.

4*. В треугольнике ABC $\angle B = 90°$, $\angle C = 45°$, $AC = 16$ см, BD – биссектриса.

а) Между какими целыми числами заключено расстояние от точки D до стороны BC?

б) Найдите длину отрезка MN, где $DM \perp AB$, $DN \perp BC$.

Урок 68 (2). Итоговый контрольный тест

Число рекомендуемых заданий может меняться в зависимости от уровня подготовленности класса и каждого ученика.

Если в классе организовано дифференцированное обучение, можно предложить, например, такую схему:

I уровень – решить задания № 1, 2, 3, 4, 5, 10;

II уровень – решить задания № 2, 3, 4, 6, 8, 10;

III уровень – решить задания № 4, 6, 7, 8, 9, 10.

Оценка «пять» ставится за пять верно выполненных заданий.

Вариант I

1. Величины смежных углов пропорциональны числам 5 и 7. *Найдите* разность между этими углами:

а) 24°; б) 30°; в) 36°; г) 40°.

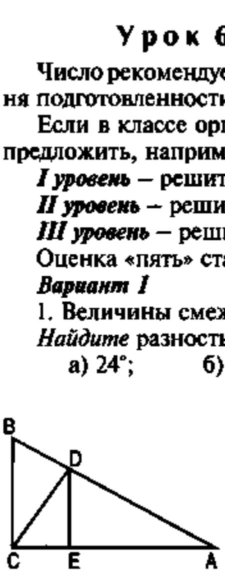


Рис. 5.99

2. Рис. 5.99.

В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, $AC = 10$ см, $CD \perp AB$, $DE \perp AC$.

Найдите AE.

а) 8 см; б) 6 см; в) 5 см; г) 7,5 см.

3. Прямые a и b параллельны, c – секущая. Разность двух углов, образованных этими прямыми, равна 130°.

Найдите отношение большего из этих углов к меньшему.

а) 3,8; б) 4,5; в) 6,2; г) 5,6.

4. Периметр равнобедренного треугольника равен 15 см, а одна из его сторон на 4 см меньше другой.

Найдите сумму боковых сторон этого треугольника.

а) $8\frac{2}{3}$ см; б) 6 см; в) 6 см или $11\frac{1}{3}$ см; г) $11\frac{1}{3}$ см.

5. Хорда AB равна 18 см. OA и OB – радиусы окружности, причем $\angle AOB = 90°$.

Найдите расстояние от точки O до хорды AB.

а) 13,5 см; б) 6 см; в) 9 см; г) 12 см.

6. В треугольнике *MPK* угол *P* составляет 60% угла *K*, а угол *M* на 4° больше угла *P*.

Найдите угол *P*.

а) 64°; б) 48°; в) 52°; г) 56°.

7. В треугольнике *ABC* углы *B* и *C* относятся как 5 : 3, а угол *A* на 80° больше их разности.

Найдите углы, на которые высота треугольника *AD* разбивает угол *A*.

а) 60°, 40°; б) 50°, 30°; в) 40°, 70°; г) 50°, 60°.

8. Высоты равнобедренного треугольника, проведенные из вершин при основании, при пересечении образуют угол в 140°.

Найдите угол, противолежащий основанию.

а) 70°; б) 100°; в) 40°; г) 50°.

9. Биссектриса угла при основании равнобедренного треугольника равна стороне треугольника.

Определите угол при основании.

а) 45°; б) 36°; в) 60°; г) 72°.

10. На какое наибольшее число равнобедренных треугольников можно разделить данный равнобедренный треугольник тремя отрезками?

а) 6; б) 4; в) 3; г) 2.

Ответы к тесту: 1 б); 2 г); 3 в); 4 г); 5 в); 6 б); 7 а); 8 в); 9 г); 10 б).

Вариант II

1. Величины смежных углов пропорциональны числам 4 и 11.

Найдите разность между этими углами:

а) 84°; б) 76°; в) 96°; г) 68°.

2. Рис. 5.100.

В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $\angle B = 30°$, $BC = 18$ см, $CK \perp AB$, $KM \perp BC$.

Найдите *MB*.

а) 9 см; б) 13,5 см; в) 12 см; г) 10 см.

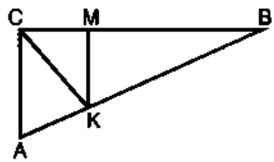


Рис. 5.100

3. Прямые *m* и *n* параллельны, *c* – секущая. Разность двух углов, образованных этими прямыми, равна 132°.

Найдите отношение большего из этих углов к меньшему.

а) 4,8; б) 5,8; в) 6,5; г) 6,2.

4. Периметр равнобедренного треугольника равен 22 см, а одна из его сторон на 5 см меньше другой.

Найдите сумму боковых сторон этого треугольника.

а) $11\frac{1}{3}$ см; б) 18 см; в) 18 см или $11\frac{1}{3}$ см; г) 17 см.

5. Расстояние от центра окружности *O* до хорды *CD* равно 13 см. Угол *COD* равен 90°.

Найдите длину хорды *CD*.

а) 18 см; б) 13 см; в) 19,5 см; г) 26 см.

6. В треугольнике *BDE* угол *B* составляет 30% угла *D*, а угол *E* на 19° больше угла *D*.

Найдите угол *B*.

а) 21°; б) 32°; в) 70°; г) 51°.

7. В треугольнике *ABC* угол *A* на 50° больше угла *B*, а угол *C* составляет пятую часть их суммы.

Найдите углы, которые образует биссектриса угла *A* со стороной *BC*.

а) 70°, 110°; б) 80°, 100°; в) 60°, 120°; г) 90°, 90°.

8. Высоты равнобедренного треугольника, проведенные из вершины при основании и из вершины, противолежащей основанию, при пересечении образуют угол 140°.

Найдите угол, противолежащий основанию.

а) 40°; б) 50°; в) 70°; г) 110°.

9. Биссектриса угла при основании равнобедренного треугольника пересекает боковую сторону под углом, равным углу при основании.

Найдите угол при основании.

а) 72°; б) 36°; в) 45°; г) 60°.

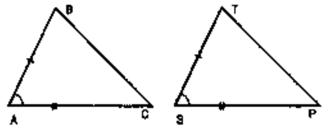
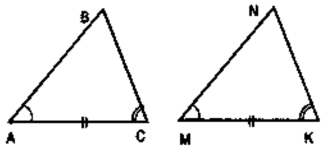
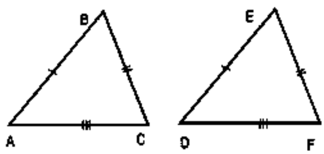
10. На какое наибольшее число равносторонних треугольников можно разделить данный равносторонний треугольник тремя отрезками?

а) 2; б) 6; в) 4; г) 3.

Ответы к тесту: 1 а); 2 б); 3 в); 4 в); 5 г); 6 а); 7 б); 8 г); 9 а); 10 в).

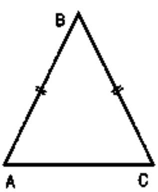
Таблица 1

Признаки равенства треугольника

По двум сторонам и углу между ними		$\Delta ABC = \Delta STP$, если 1) $AB = ST$; 2) $AC = SP$; 3) $\angle A = \angle S$
По стороне и двум прилежащим к ней углам		$\Delta ABC = \Delta MNK$, если 1) $AC = MK$; 2) $\angle A = \angle M$; 3) $\angle C = \angle K$
По трем сторонам		$\Delta ABC = \Delta DEF$, если 1) $AB = DE$; 2) $BC = EF$; 3) $AC = DF$

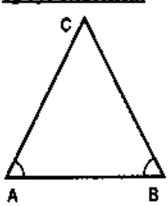
Равнобедренный треугольник

Определение



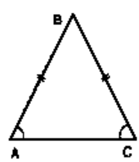
AB, BC – боковые стороны;
AC – основание;
ΔABC – равнобедренный, если $AB = BC$

Признак равнобедренного треугольника

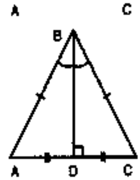


Если в ΔABC $\angle A = \angle B$, то ΔABC – равнобедренный с основанием AB

Свойства равнобедренного треугольника

1) 

В равнобедренном треугольнике углы при основании равны

2) 

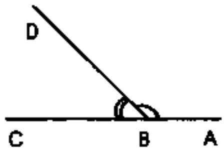
BD – медиана, высота биссектриса

3) В равнобедренном треугольнике медианы (высоты, биссектрисы), проведенные к боковым сторонам, равны

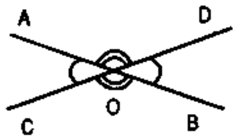
Таблица 2

Параллельные прямые и углы

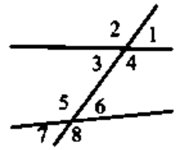
Углы, образованные при пересечении прямых



$\angle ABD$ и $\angle CBD$ – смежные;
$\angle ABD + \angle CBD =$
$= 180°$

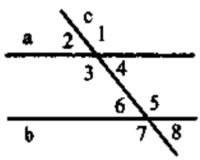


$\angle AOC$ и $\angle DOB$ – вертикальные;
$\angle AOD$ и $\angle BOC$ – вертикальные;
$\angle AOC = \angle DOB$;
$\angle AOD = \angle BOC$



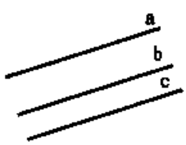
$\angle 1$ и $\angle 6$, $\angle 2$ и $\angle 5$, $\angle 3$ и $\angle 7$, $\angle 4$ и $\angle 8$ – соответственные;
$\angle 3$ и $\angle 5$, $\angle 4$ и $\angle 6$ – односторонние;
$\angle 4$ и $\angle 5$, $\angle 3$ и $\angle 6$ – накрест лежащие

Свойства параллельных прямых

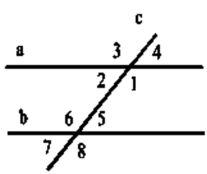


Если $a \parallel b$, c – их секущая, то:
1) $\angle 1 = \angle 5$, $\angle 4 = \angle 8$, $\angle 2 = \angle 6$, $\angle 3 = \angle 7$
(соответственные углы равны);
2) $\angle 4 = \angle 6$, $\angle 3 = \angle 5$
(накрест лежащие углы равны);
3) $\angle 4 + \angle 5 = 180°$, $\angle 3 + \angle 6 = 180°$
(сумма односторонних углов равна 180°)

Признаки параллельности прямых



Если $a \parallel b$ и $c \parallel b$, то $a \parallel c$



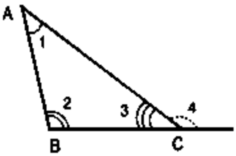
Если $a \cap c$, $b \cap c$ и
1) $\angle 1 = \angle 6$ ($\angle 2 = \angle 5$), то $a \parallel b$;
2) $\angle 4 = \angle 5$ ($\angle 3 = \angle 6$, $\angle 2 = \angle 7$, $\angle 1 = \angle 8$), то $a \parallel b$;
3) $\angle 1 + \angle 5 = 180°$ ($\angle 2 + \angle 6 = 180°$), то $a \parallel b$

Аксиома параллельности прямых

Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.

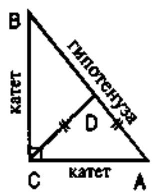
Таблица 3

Соотношение между сторонами и углами треугольника



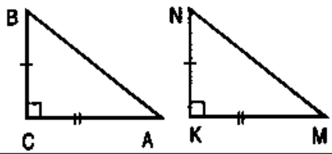
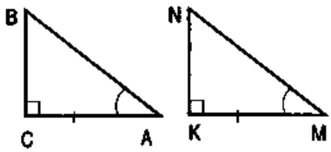
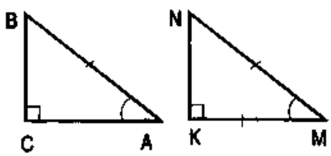
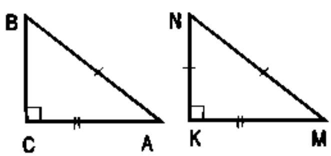
1) $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$;
2) Если $\angle 1 < \angle 3 < \angle 2 \Rightarrow BC < AB < AC$;
3) $AB < BC + AC$, $BC < AB + AC$, $AC < AB + BC$;
4) $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$

Прямоугольный треугольник и его свойства



1) $\angle A + \angle B = 90°$;
2) если $\angle B = 30°$, то $AC = 1/2AB$ (если $\angle A = 30°$, то $BC = 1/2AB$);
3) если CD – медиана, то $CD = BD = AD$;
4) если CD – медиана и $CD = BD = AD$, то ΔABC – прямоугольный

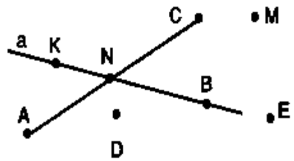
Признаки равенства прямоугольных треугольников

По двум катетам		$\Delta ABC = \Delta MNK$, если 1) $BC = NK$, 2) $AC = MK$
По катету и прилежащему к нему острому углу		$\Delta ABC = \Delta MNK$, если 1) $AC = MK$, 2) $\angle A = \angle M$
По гипотенузе и острому углу		$\Delta ABC = \Delta MNK$, если 1) $AB = MN$, 2) $\angle A = \angle M$
По гипотенузе и катету		$\Delta ABC = \Delta MNK$, если 1) $AB = MN$, 2) $AC = MK$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Карточки для индивидуальной работы с учащимися

Начальные геометрические сведения

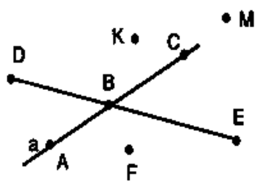
1 | I



1. Назовите точки, принадлежащие прямой a и не принадлежащие ей.
2. Сколько прямых можно провести через точки K и B?
3. Пересекаются ли:
   а) прямая a и отрезок AD;
   б) прямая a и отрезок CM.
4. Верно ли, что:
   а) $AN + NC = AC$;
   б) $DB + BM = DM$?
5. Укажите точки, принадлежащие лучу NB.

Начальные геометрические сведения

1 | II

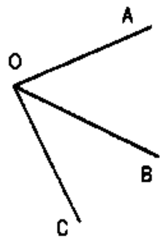


1. Назовите точки, принадлежащие отрезку AC и не принадлежащие ему.
2. Сколько прямых можно провести через точки A и B?
3. Пересекаются ли:
   а) прямые a и DK;
   б) прямая AC и отрезок DK?
4. Верно ли, что:
   а) $AB + BC = AC$;
   б) $KB + BF = KF$.
5. Принадлежат ли лучу BC точки A, M, K?

Начальные геометрические сведения

2

I



1. Перечислите все углы, изображенные на рисунке.
2. Найдите градусную меру угла AOC, если $\angle AOB = 50°$, $\angle BOC = 30°$.
3. Найдите градусную меру угла AOB, если $\angle AOC = 100°$, а $\angle COB$ на 25° меньше, чем $\angle AOB$.

Начальные геометрические сведения

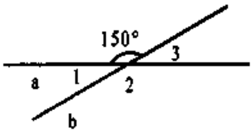
2

II

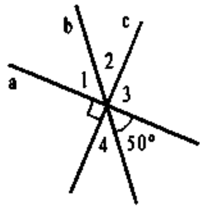
1. Перечислите все углы, изображенные на рисунке.
2. Найдите градусную меру угла NEK, если $\angle MEK = 70°$, $\angle MEN = 45°$.
3. Найдите градусную меру угла MEN, если $\angle MEK = 80°$, а $\angle NEK$ в три раза меньше, чем $\angle MEN$.

Смежные и вертикальные углы

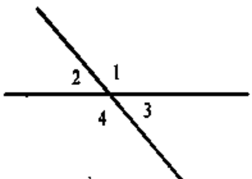
3 **I**



а)



б)



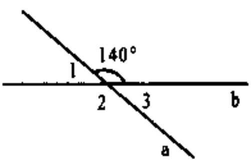
в)

$\angle 1 : \angle 2 = 3 : 2$

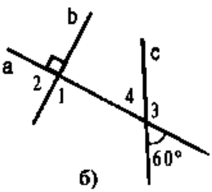
Найдите углы 1, 2, 3, 4 .

Смежные и вертикальные углы

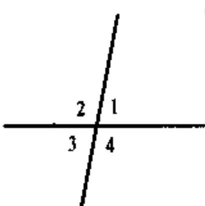
3 **II**



а)



б)



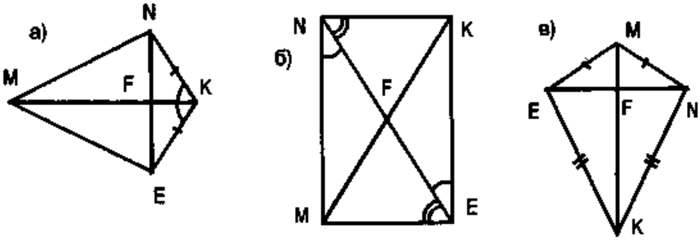
в)

$\angle 1$ на 80° меньше $\angle 2$

Найдите углы 1, 2, 3, 4 .

Признаки равенства треугольников

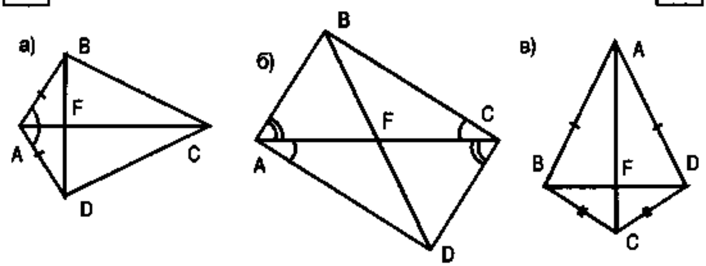
4 I



1. Докажите, что $\Delta MNK = \Delta MEK$.
2. Является ли биссектрисой угла *NME* луч *MK*?
3. Равны ли треугольники *MNF* и *MEF*?
4. Перпендикулярны ли *MK* и *NE*?

Признаки равенства треугольников

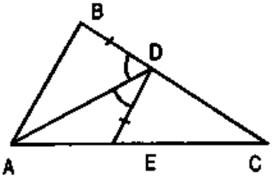
4 II



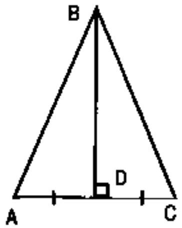
1. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta ADC$.
2. Является ли биссектрисой угла *BCD* луч *CA*?
3. Равны ли треугольники *ABF* и *ADF*?
4. Перпендикулярны ли *AC* и *BD*?

Медиана, высота и биссектриса треугольника

5 I



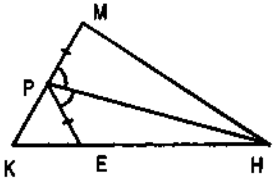
Дано: $\Delta\ ABC$, $BD = DE$,
DA – биссектриса $\angle\ BDE$.
Доказать: AD – биссектриса $\Delta\ ABC$.



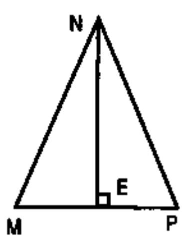
Дано: $\Delta\ ABC$,
BD – медиана и высота $\Delta\ ABC$.
Доказать: а) $AB = BC$;
б) BD – биссектриса $\Delta\ ABC$.

Медиана, высота и биссектриса треугольника

5 II



Дано: $\Delta\ KMN$, $PM = PE$,
PH – биссектриса $\angle\ MPE$.
Доказать: HP – биссектриса $\Delta\ KMN$.

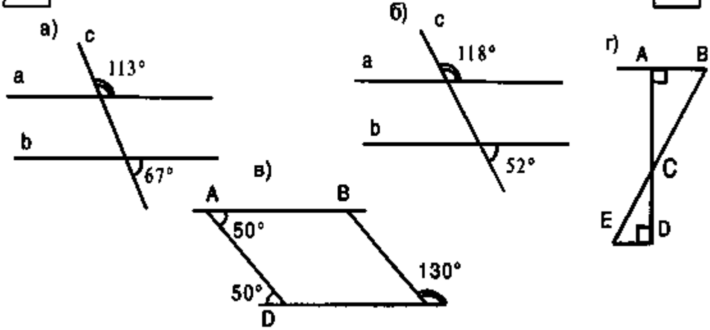


Дано: $\Delta\ MNP$,
NE – медиана и высота $\Delta\ MNP$.
Доказать: а) $MN = NP$;
б) NE – биссектриса $\Delta\ MNP$.

Признаки параллельности прямых

6

I

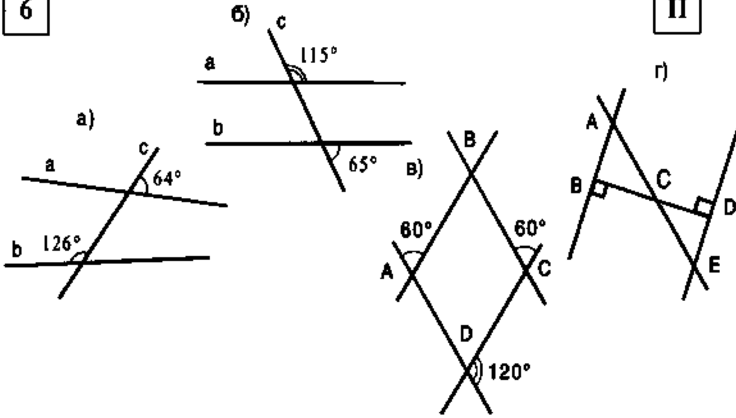


Укажите параллельные прямые.

Признаки параллельности прямых

6

II

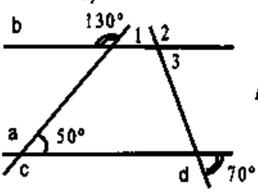


Укажите параллельные прямые.

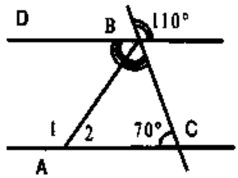
Свойства параллельных прямых

7 I

а)

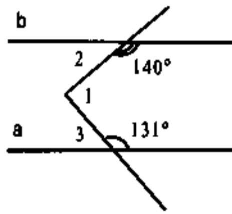


б)



BA – биссектриса $\angle DBC$

в)



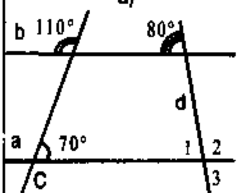
Дано: a || *b.*

Найдите градусные меры углов 1, 2, 3.

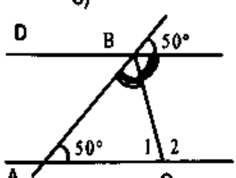
Свойства параллельных прямых

7 II

а)

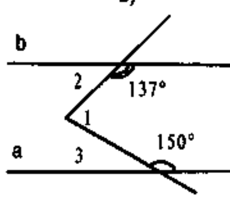


б)



BC – биссектриса $\angle ABD$

в)



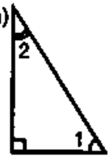
Дано: a || *b.*

Найдите градусные меры углов 1, 2, 3.

Сумма углов треугольника

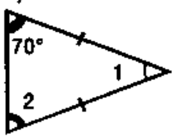
8 **I**

а)

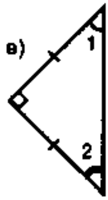


$\angle 1 : \angle 2 = 2 : 1$

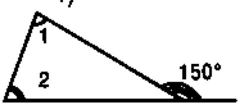
б)



в)

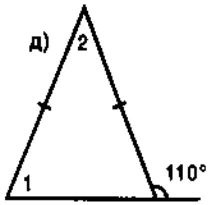


г)

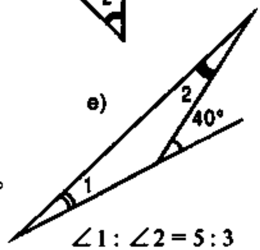


$\angle 2 - \angle 1 = 10°$

д)



е)



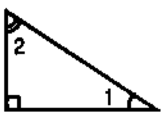
$\angle 1 : \angle 2 = 5 : 3$

Найдите градусные меры углов 1 и 2.

Сумма углов треугольника

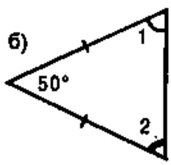
8 **II**

а)

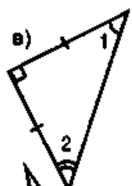


$\angle 1 : \angle 2 = 4 : 5$

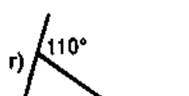
б)



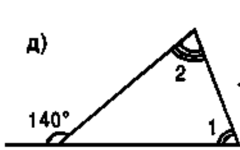
в)



г)

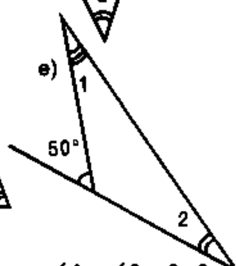


д)



$\angle 1 - \angle 2 = 10°$

е)



$\angle 1 : \angle 2 = 2 : 3$

Найдите градусные меры углов 1 и 2.

9 *Соотношения между сторонами и углами треугольника* **I**

1) В ΔABC биссектриса угла C пересекает сторону AB в точке D, $AD = DC$, $\angle A = 40°$. Докажите, что $AB > BC$.
2) Могут ли стороны треугольника относиться как 2 : 3 : 6?
3) Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 10 см. Какой длины может быть основание этого треугольника?

---

9 *Соотношения между сторонами и углами треугольника* **II**

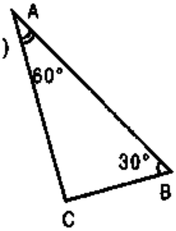
1) В ΔABC угол ABC равен 70°. Биссектриса этого угла пересекает сторону AC в точке D, $BD = DC$. Докажите, что $AB < AC$?
2) Могут ли стороны треугольника относится как 3 : 5 : 8?
3) Основание равнобедренного треугольника равна 30 см. Какой длины может быть боковая сторона этого треугольника?

Прямоугольный треугольник

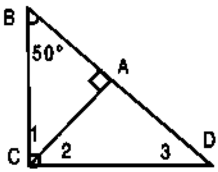
10

I

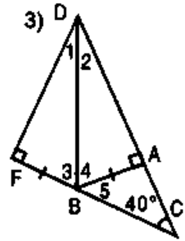
1)



2)



3)



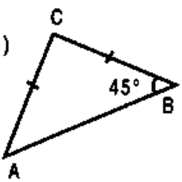
1) Является ли $\Delta\ ABC$ прямоугольным?
2) Найдите градусные меры углов 1, 2, 3, 4, 5.
3) Укажите равные прямоугольные треугольники.

Прямоугольный треугольник

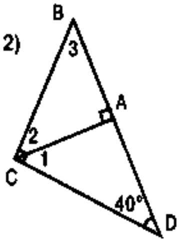
10

II

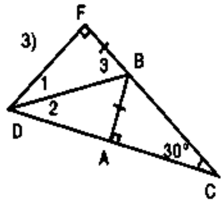
1)



2)



3)



1) Является ли $\Delta\ ABC$ прямоугольным?
2) Найдите градусные меры углов 1, 2, 3, 4, 5.
3) Укажите равные прямоугольные треугольники.

Содержание

От автора 3
Тематическое планирование учебного материала 5
Поурочные разработки по геометрии 7
Глава I. Начальные геометрические сведения (уроки 1–11) 7
Глава II. Треугольники (уроки 12–29) 56
Глава III. Параллельные прямые (уроки 30–42) 132
Глава IV. Соотношения между сторонами и углами треугольника (уроки 43–62) 181
Глава V. Повторение (уроки 63–68) 255
Приложения 275
Приложение1. Контрольные работы 275
Приложение 2. Обобшающие таблицы 290
Приложение 3. Карточки для индивидуальной работы с учашимися 295

Учебно-методическое пособие

В ПОМОЩЬ ШКОЛЬНОМУ УЧИТЕЛЮ

Гаврилова Нина Федоровна

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ПОУРОЧНЫЕ РАЗРАБОТКИ ПО ГЕОМЕТРИИ

7 класс

Дизайн обложки *Екатерины Бедриной*

Налоговая льгота –
Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93-953000.
Издательство «ВАКО»
Подписано к печати с диапозитивов 20.04.2010.
Формат 84×108/32. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. листов 15,96. Тираж 7000 экз. Заказ № 3525.

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени
«Чеховский полиграфический комбинат»
142300, г. Чехов Московской области
Сайт: www.chpk.ru, e-mail: marketing@chpk.ru
Факс: 8(496) 726-54-10; телефон: 8(495) 988-63-87